बच्चे और गणित

पाठ – 14 बच्चों की गणित सीखने में मदद

परिचय – बच्चे की पृष्ठभूमि के आधार पर आगे बढ़िए – संबंध जोड़ना – अ–भा–चि–प्र – खेल–खेल में सीखना – सीखने में मददगार अन्य तरीकें – जरूरी नहीं कि दोहराव उबाऊ हो – बच्चे एक दूसरे से सीखते हैं – ग़लतियाँ उपयोगी होती हैं – सारांश।

पाठ – 15 कक्षा का कामकाज

परिचय – गणित सीखना : आइए, थोड़ा दोहराएँ – शिक्षण योजना – योजना क्यों बनाएँ? – योजना कैसे बनाएँ? – अलग–अलग स्तरों की योजना – साल की योजना – इकाई की योजना – पाठ की योजना – सीखने–सिखाने की प्रक्रिया का मूल्यांकन – सारांश।

पाठ 14
बच्चों की गणित सीखने में मदद

परिचय

क्या आपको अपने स्कूल के दिन, खास तौर से गणित की कक्षाएं याद हैं? इन कक्षाओं मे ऐसा क्या था जिससे गणित आपको पसंद या नापसंद आया? इस पाठ में हम इन्हीं प्रश्नों से संबंधित कुछ मुद्दे उठाएंगे। पिछले पाठों में हमने पूर्व व प्राइमरी स्कूली बच्चों के कुछ पहलुओं पर चर्चा की थी। वहाँ हमने देखा था किः

(i) बच्चों और बड़ों के सोचने के ढंग में बहुत फर्क होता है।

(ii) बच्चों के विकास का एक निश्चित क्रम होता है और यह क्रम आम तौर पर सभी बच्चों पर लागू होता है। लेकिन हर बच्चे की विकास की गति अलग – अलग होती है।

(iii) हर बच्ची अपने आसपास की चीज़ों का "अर्थ निकालने" के अपने रास्ते विकसित कर लेती है।

(iv) बच्चे जब औपचारिक स्कूल में दाखिल होते हैं, वे कुछ गणित पहले से ही जानते है।

(v) छोटे बच्चे अपने आसपास की दुनिया को समझने के तरीके बनाने के लिए खेल व अन्य गतिविधियों का इस्तेमाल करते हैं।

(vi) बड़े बच्चे भी ठोस पदार्थों व खेलों से सीखते हैं, और सीखने के इन अनुभवों के द्वारा स्कूलों में दिए जाने वाले औपचारिक ज्ञान का भी अर्थ निकाल सकते हैं।

(vii) अफसोस की बात है कि गणित के ज्यादातर शिक्षक समझने की बजाय रटने व ऐल्गोरिद्म पर ज़ोर देते हैं। हो सकता है कि गणित के ये "नियम" बड़ों को समझ में आ जाएं, लेकिन यह जरूरी है कि इन्हें बच्चों को ऐसे तरीकों से ही सिखाया जाए जिनसे बच्चे इन्हें समझ सकें।

(viii) हम जानते हैं कि किसी भी गणितीय अवधारणा या कुशलता सीखनें के दौरान बच्चे किस तरह की लम्बी व कठिन प्रक्रिया से गुज़रते हैं। लेकिन औपचरिक स्कूली व्यवस्था में जो समय पाठ्यक्रम को "पूरा करने" के लिए दिया जाता है उसमें इस बात को ध्यान में नहीं रखा जाता है।

इस पाठ में इस बात पर चर्चा होगी कि गणित सिखाते वक्त उन बातों को ध्यान में क्यों रखना चाहिए।

इस पाठ में हमने कुछ ऐसे सिद्धांतों पर ज़ोर देने का प्रयास किया है जिन्हें पूर्व स्कूली व प्राइमरी स्कूलों के बच्चों को गणित सिखाने के दौरान ध्यान में रखना जरूरी हैं। ऐसा करने से प्राइमरी स्कूल के किसी भी एक बच्चे के लिए एक ऐसा माहौल बनाने में मदद मिलेगी जो उसकी विकास की अवस्था, उसकी जरूरतों, उसके सोचने व सीखने के तरीकों और सीखने की गति के मुताबिक होगा।

हमने गतिविधियों व अनुभवों के कुछ ऐसे उदाहरण भी दिए हैं जिन्हें बच्चों को उनके गणितीय तरीके से सोचने के ढंग को विकसित करने के लिए दिया जा सकता है। इससे आप अपने सीखने वालों की जरूरतों के अनुसार गतिविधियों में परिवर्तन करें।

बच्चे की पृष्ठभूमि के आधार पर आगे बढ़ना

कोई भी दो बच्चे एक जैसे नहीं होते। हर बच्चे की उम्र, जानकारी का स्तर, पृष्ठभूमि वगैरह अलग होती है। एक शिक्षक के लिए इन बातों का क्या महत्व है? क्या उसे इन बातों व सीखने के अलग–अलग तरीकों को ध्यान में रखना जरूरी नहीं है?

चित्र 1 : एक शिक्षक को अपने सीखने वालों में जो फर्क होते हैं उनके प्रति जागरूक होना चाहिए

E1) शिक्षक को पढ़ाते समय किन बातों को ध्यान में रखना चाहिए?

चलिए एक उदाहरण देखते हैं जिसमें एक शिक्षक ने अपने विद्यार्थी की सीखने में मदद करने के लिए उसकी पृष्ठभूमि को ध्यान में रखा।

उदाहरण–

एक गांव के स्कूल में पांचवी कक्षा के एक बच्चे, सुमित, को जोड़ और घटा करने के औपचारिक तरीके से परिचित कराया जा रहा था। शिक्षक ने औपचारिक तरीका से पहले यह समझने की कोशिश की कि उसे पहले से ही कितना आता है।

शिक्षक : 8 और 11 कितने होते हैं?

सुमित : 19

शिक्षक : यह तुमने कैसे किया?

सुमित : गिनकर । मैंने पहले 11 लिया और फिर 8 जोड़ दिए।

सुमित ने बड़ी संख्या से "आगे गिनने" (counting on) का तरीका अपनाया था और अपना तरीका वह शब्दों में समझा भी पाया था।

शिक्षक : अच्छा! 22 जोड़ 19 कितना होगा?

सुमित : (22 + 19 लिखकर) : 41?

शिक्षक : तुमने क्या 22 से आगे एक–एक करके गिना?

सुमित : मैंने पहले 19 में से 10 लिए, और इस तरह हो गए 32, और फिर बचे हुए9 लिए, और 41 हो गए।

इस बार सुमित ने "पुनः समूहीकरण" (regrouping) का तरीका अपनाया ताकि वह आसानी से जोड़ सके।

इसके बाद उसे दिया गया लिखित अभ्यास उसका उत्तर था।

उसका यह उत्तर कैसे आया? उसने इकाई के कॉलम में 8 और 5 को ठीक जोड़कर जवाब पाया 13, फिर 1 को इकाई के कॉलम के नीचे लिखकर, "हासिल" के 3 लिए और दहाई के 1 में जोड दिए। इस तरह इकाई के कॉलम में आया 4 इसलिए, उसका उत्तर था 41!

उसे पूरी तरह से यकीन था कि उसका उत्तर सही है। तब शिक्षक ने प्रश्न को दूसरी तरह से रखना तय किया। उन्होंने कहा, "अगर तुम्हारे पास 18 कंचे थे और तुम्हें 5 कंचे और मिल जाते, तो तुम्हारे पास कुल मिलाकर कितने कंचे हो जाते ?" सुमित ने अपनी उंगलियों पर गिना और कह, 23। जब शिक्षक ने उसका ध्यान उसके लिखित उत्तर की तरफ दिलाया तो वह धीरे – धीरे मान गया कि वह उत्तर गलत था। है ना यह रोचक बात कि वह औपचारिक तरीके की बजाए अपने मन से किए तरीके को सही मानने को तैयार था?

इस उदाहरण में सुमित ने संख्याओं को जोड़ने के लिए उचित और कुशल तरीकों को इस्तेमाल करने की अच्छी तरह विकसित क्षमता का प्रदर्शन किया। हालांकि उसे औपचारिक प्रतीकों से जोड़–तोड़ करना कठिन लगा। इसके कई कारण हो सकते हैं। जैसे सुमित को स्थानीय मान की पूरी समझ नहीं है। या सुमित को दी गई संख्याओं को जोड़ने का यह काम गणितीय नियमों से करना सार्थक न लगा हो। जैसे ही शिक्षक ने सवाल को एक संदर्भ में और ठोस वस्तुओं (कंचे गिनना) के साथ रखा, सुमित उसे समझ गया और इसलिए हल भी कर पाया।

यह उदाहरण साफ तौर पर दिखाता है कि सुमित ने जोड़ करने के अपने तरीके विकसित कर लिए हैं; "आगे गिनना" और "पुनः समूहीकरण"। वह संस्थाओं के पैटर्नों से परिचित था और इसलिए वह पुनः समूह बनाकर

बड़ी संख्याओं को भी आसानी से जोड़ पाया। और कैसे उस जानकारी का उपयोग करके शिक्षक ने सवाल को दो तरह से सुमित की समझ में लाने की कोशिश की:

(i) सवाल को उसके अनुभवों के संदर्भ में रखकर, और

(ii) सवाल को उसके लिए ठोस बनाकर।

E2) रवि दिल्ली नगर पालिका के एक स्कूल में कक्षा 4 का शिक्षक है। जब नया स्कूल–वर्ष शुरू हुआ तो वह पाठ्य पुस्तक खोलकर बच्चों को 4 अंको वाली संख्याएं लिखना सिखाने लगा। उसने किताब में से कुछ हिस्सा बोर्ड पर उतार लिया उसके बाद उन्हें ढेर सारे सरल सवाल देकर कमरे से बाहर चला गया। बाद में, उसे यह देखकर आश्चर्य हुआ कि अधिकतर बच्चे सवालों को नहीं कर पाए थे। आपके हिसाब से बच्चों की ऐसी परिस्थिति क्यों बनी?

जब किसी बच्चे की कोई अवधारणा सिखाई जा रही हो तो पहचानना महत्वपूर्ण है कि पहले से उसे क्या – क्या मालूम होना चाहिये, और क्या वह उतना सीख चुकी है।

कुछ सिद्धान्त गणित सीखने के संदर्भ में–

संबंध जोड़ना

हम जानते हैं कि गणित सीखने के दौरान उत्तर पाने की प्रक्रिया पर ज़ोर देने की ज़रूरत है, न कि सिर्फ उत्तर पाने पर। इसलिए, एक शिक्षक की हैसियत से यह जरूरी है कि आप बच्चों को अपने आस–पास की दुनिया को गौर से देखने, सवाल पूछने, खोज करने और तर्कों के आधार पर उत्तर ढूंढने के लिए बढ़ावा दें। यह भी जरूरी है कि आप उन्हें अपने तार्किक सोच को व्यवस्थित करने के लिए प्रेरित करें।

चित्र 2 : इसके सींग क्यों हैं?
क्योंकि जब .... इसलिए।

इसके लिए पहले तो, आप बच्चों को प्रश्न पूछने के लिए प्रेरित करें। जब बच्चे, आपसे पूछें, "कुछ पत्ते हरे और कुछ पत्ते भूरे क्यों होते हैं?" या "चांद हमारे साथ–साथ कैसे चलता है?" या "मरने के बाद लोग कहां चले जाते हैं", आपका जवाब ऐसा होना चाहिए कि उन्हें संतुष्ट कर सके। आपको ये प्रश्न चाहे कितने ही कठिन या बेवकूफी भरे लगें आपको उन्हें गंभीरतापूर्वक लेना चाहिए और तार्किक तरीके से उत्तर ढूंढने में उनकी मदद करनी चाहिए।

एक और बात जो मदद करती है वह है बच्चों के सामने ऐसे प्रश्न रखना जिनके कि उन्हें पहले से ही निश्चित जवाब न दिए जाएं। जैसे, "इस कागज को तुम कितनी तरह से एक वर्ग की शक्ल में मोड़ सकते हो?" उन्हें अपने प्रश्न खुद बनाने का मौका दिया जा सकता है जैसे कि सवाल जवाब या अटकलबाज़ी के खेलों में, जिनकी जिक्र हमने किया है। इस तरह के मौके देने से बच्चे बहुत सी बातें आसानी से और रोचक तरीके से सीखते हैं। ऐसा करने से बच्चों को अपनी मानसिक क्षमताएं विकसित करने का मौका भी मिलता है। इनसे बच्चों को यह अहसास भी होता है कि एक सवाल के कई जवाब भी हो सकते हैं।

बच्चे अपने तर्को को व्यवस्थित करें इसके लिए उन्हें बढ़ावा व मार्गदर्शन देने के लिए आप बहुत तरह की गतिविधियां सोच सकते हैं। जैसे, उनसे चीज़ों के एक ढेर का वर्गीकरण करने के लिए मापदंड (criteria) चुनने को कहा जा सकता है, और इन मानदंडों को सही तरह से लागू करने में उनकी मदद की जा सकती है। या वे अपने स्कूल के साथियों के स्कूल आने के अलग–अलग तरीकों की परिकल्पना कर सकते हैं। फिर वे आंकड़े इकट्ठे करके, उन्हें लिखकर और उनका विश्लेषण करके परिकल्पना को सिद्ध कर सकते हैं या

उसका खंडन कर सकते हैं।

E3) (क) मापन में एक विषय चुनिये और उनसे अपने ही संदर्भ में दो ऐसी गतिविधियां बनाइये जिनसे आपके विद्यार्थियों को इस अवधारणा की छानबीन करने और सीखने में मदद मिले।

(ख) कुछ बच्चों के साथ इन गतिविधियों को करिये और लिखिये कि किस प्रकार ये गतिविधियाँ बच्चों के गणितीय सोच को बढ़ावा देती हैं।

गणितीय सोच का एक महत्वपूर्ण पहलू है पैटर्नों और पहचानने की क्षमता। एक शिक्षक की हैसियत से एक बच्चे में आप यह क्षमता कैसे विकसित कर सकते हैं? चलिये देखते हैं कि अदिति की शिक्षक ने यह कैसे किया।

10 साल की अदिति मन में करने वाले गणित के सवालों में व्यस्त थी। 2×76 को हल करते वक्त उसका उत्तर आया 432। उससे दोबारा करने के लिए कहा गया और दोबारा उसने 432 कहा। शिक्षक को समझ में आया कि अदिति ने 76×2 की बजाय 72×6 कि है। उन्होंने बताया कि कैसे उन्होंने सही उत्तर तक पहुंचने में अदिति की मदद की। उन्होंने अदिति से नीचे लिखे प्रश्न दिये हुये क्रम में पूछे :

2×100 कितना होता है? अदिति ने कहा 200

2×90 ? 180

2×80 ? 160

2×76 ? (कुछ क्षण के बाद) 432

2×70 ? 140

2×80 ? 160

2×76 ? 432

2×100 ? 200

2×200 ? 400

2×76 ? 432

अचानक अदिति रूकी, थोड़ा सोचा और बोली, "रूकिये। मुझे लगता है कुछ गड़बड़ है। मुझे करने दीजिए।" उसने काग़ज और पैन्सिल निकाली और गुणा करके निकाला कि 2 x 76 बराबर है 152 के, और फिर अपने आपसे बहुत खुश हुई।

इस स्थिति में ख़ास बात यह है कि शिक्षक ने क्या नहीं किया।

- उन्होंने एकदम से अदिति को सही उत्तर नहीं बताया।
- उन्होंने अदिति से यह नहीं कहा कि उसने गल़ती की थी।
- उन्होंने उसे मूर्ख कहकर उसके अहम को चोट नहीं पहुंचायी।
- उन्होंने उसे धमकाया नहीं।
- उन्होंने कक्षा को उस पर हंसाया नहीं।

जो शिक्षक ने किया, वह था–

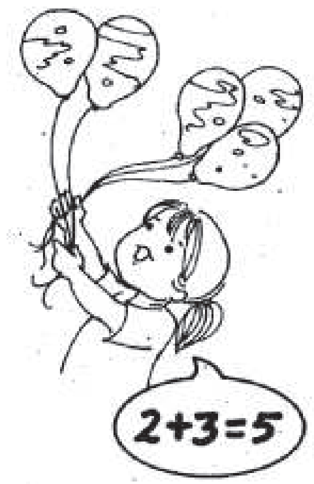
- उन्होंने अदिति से बात की।

- उन्होंने सोचा और पहचाना कि गल़ती क्यों हो रही है।
- उन्होंने एक ऐसा तरीका सोचा जो, उनके अनुसार, अदिति को अपनी गल़ती समझने में मदद करेगा।
- उन्होंने धैर्य रखा और अदिति को यह समझने में मदद के लिए कि उसके सवाल हल करने के तरीके में कुछ गड़बड़ है, उसे कई मौके दिए।
- उन्होंने अदिति को अवलोकन करने, सोचने, पैटर्न पहचानने और संबंध जोड़ने के लिए उत्साहित किया।

यानि कि शिक्षक सीखने के लिए एक अर्थपूर्ण माहौल बनाने की कोशिश कर रही थी।

अफसोस की बात है, कि बहुत सारे शिक्षक ऐसा नहीं करते हैं। जैसा कि हमने चर्चा की थी, गणित सिखाते वक्त इस पर ज्य़ादा जोर दिया जाता है कि बच्चे ऐल्गोरिद्म को मशीनी ढंग से इस्तेमाल करना सीख लें। उन्हें यह समझने में मदद नहीं दी जाती कि ये ऐल्गोरिद्म क्यों और कैसे काम करते हैं।

E4) बहुत मेहनत के बाद 8 साल के हरि ने 2 X 88 का हल निकाला 176, जब उससे पूछा 2×89 कितना होगा तो बहुत मेहनत करके उसने उत्तर निकाला 178। आप कैसे उसकी यह समझने में मदद करेंगे कि उत्तर पाने का एक ज्यादा आसान तरीका हैं?



चित्र 2 : इसके सींग क्यों हैं?
क्योंकि जब .... इसलिए।

ज्य़ादातर बच्चे हरि की तरह होते है। उन्हें अवलोकन करने की, छानबीन करने की, संबंध पहचानने की और वे जो पैटर्न पाते हैं उनका व्यापकीकरण करने की ट्रेनिंग नहीं मिलती है। उनके लिए 2×88 वैसा ही एक "तथ्य" है जैसा कि 2×89, जिसे पाने के लिए वे एकसा ही लंबा रास्ता अपनाते हैं। यह इसके बावजूद है कि अपने आसपास के माहौल में पैटर्न पहचानते हैं और जिन चीज़ों से उनका वास्ता पड़ता है उनके बीच के संबंध भी देख पाते हैं। हम इस स्थिति को कैसे सुधार सकते हैं?

असल में, गणित सिखाते वक्त हमें बच्चों को पैटर्न ढूंढने और पहचानने में, उन पर गौर करके उनसे प्राप्त नियमों को समझ पाने में व अपने सोच में उनका इस्तेमाल करने के लिए प्रेरित करना है। इसका एक अच्छा तरीका यह हो सकता है कि उन्हें ऐसे खेल खिलाए जाएं जिनमें वे चीज़ों को क्रम में लगा सकें। जब बच्चे, एक चीज़ के बाद दूसरी किसी क्रम में रखते हैं तो उनमें पैटर्न की समझ बनती है, व्यापकीकरण का एक अहसास बनता है। धीरे – धीरे उन्हें ऐसे खलों में, जिनमें वे चीज़ों से खेलते हैं, ऐसे खेलों पर लाया जा सकता है जिनमें वे अपनी पहचानी चीज़ों के चित्रों को क्रम में रखते हैं। ऐसे ही, धीरे – धीरे बच्चे संख्याओं में भी पैटर्न देखने लगेंगे। एक बार जब बच्चे पैटर्न पहचानने, समझने व बनाने लगेंगे तब वे हिसाब के सवालों में उनका इस्तेमाल भी कर सकेंगे।

लेकिन यह काफी नहीं है कि बच्चों को एक पैटर्न दिखा जाए, (जैसे गुणा में मान लीजिए) और फिर अलग विषय पर चले जाए। बच्चों को खुद खोजने के लिए समय चाहिए ताकि वे जो पता लगा रहे हैं उसका अहसास उन्हें हो पाए।

E5) ऐसी कुछ गतिविधियों / कामों / अभ्यासों की सूची बनाइये जो आप 50 बच्चों की एक कक्षा को देंगे जिससे कि बच्चे पैटर्नों को ढूंढें और पहचानें, और बता पाएं कि वे पैटर्न क्या हैं।

आप सोच रहे होंगे कि हमने गणितीय सोच के एक मूलभूत पहलू यानि कि विशेष से व्यापक व व्यापक से विशेष तक जाने की क्षमता के बारे में कुछ क्यों नही कहा है। एक बच्चे में यह क्षमता विकसित होने के लिए, एक अवस्था के बाद उसे औपचारिक गणित सीखना पड़ेगा। अमूर्त अवधारणाओं व प्रतीकों को आसानी से समझ पाने के लिए उसे किन प्रक्रियाओं से गुजरना होगा?

अ–भा–चि–प्र

क्या इस शीर्षक ने आपको चक्कर में डाल दिया ? इसी तरह बच्चे भी ऐसे नये प्रतीकों को समझ नहीं पाते जो पूरी तरह समझाए बिना उन पर थोप दिए जाते हैं। बच्चों में गणित की समझ बनाने के लिए आपको उन्हें सावधानी से बनाए गए क्रम में सीखने के अनुभव देने होंगे। कुछ भी और सीखने की तरह ही गणित सीखना भी एक निरंतर प्रक्रिया है। बच्चों को ठोस अनुभवों का क्रम होना चाहिए :

(अ) ठोस वस्तुओं के साथ **अनुभव** (जैसे, कंकड़, लकड़ियां या अन्य कोई भी आसानी से मिलने वाली चीज़ें);

(भा) बोलकर अनुभवों के बारे में बताना, यानि कि **भाषा** का उपयोग (जैसे, शब्द/कहानी सवालों के उपयोग से, खेलों से);

(चि) अनुभव को **चित्रों** द्वारा दिखाना (जैसे, मात्रा को चित्रों द्वारा दिखाना);

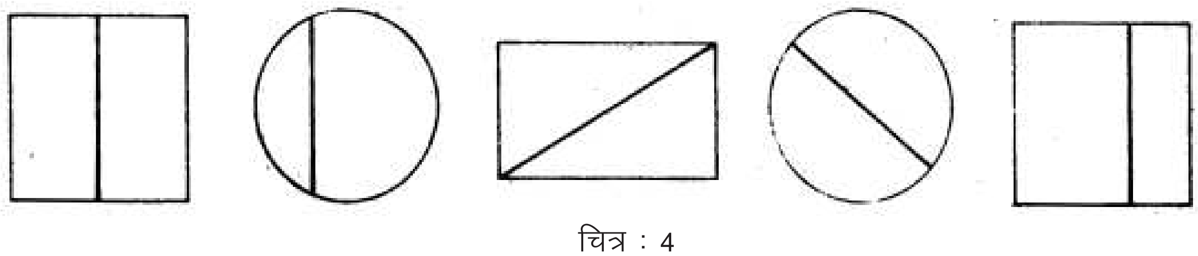
(प्र) अनुभव का लिखित **प्रतीकों** द्वारा व्यापकीकरण (जैसे, संख्यांक)।

चलिये, यह मान कर कि कोई बच्ची पूर्ण संख्याओं से परिचित है, उसकी "आधे" की अवधारणा सीखने के संदर्भ में इस क्रम को देखें।

(अ) वह अपनी रोटी/सैंडविच, या रंगीन काग़ज का एक टुकड़ा, या अन्य कोई भी ऐसी चीज़ों को आधे–आधे में बाँटती है। बाद में वह, मान लीजिये, 6 चीज़ों को दो समूहों में बाँटती है।

(भा) वह शब्द "आधे" को मात्रा से जोड़ने लगती है। आप ऐसे खेल बना सकते है जिससे वह अलग–अलग भिन्न संख्याओं के नामों से परिचित हो पाए।

(चि) आप चित्र 4 में दिखाए गए तरीके से उसे विभिन्न चित्र दिखा सकते हैं,



चित्र : 4

और उससे बताने को कह सकते हैं कि किन चित्रों में रेखा चित्र को आधे में बांटती है। बच्चों को इस तरह के कई अनुभव दिए जा सकते हैं (खंड 4 देखिए)।

(प्र) इसके बाद वह "आधे" का प्रतीक लिखना सीखती है।

E6) क्या आप सीखने के क्रम अ–भा–चि–प्र की आवश्यकता से सहमत है? यदि नहीं, तो आप गणित की अवधारणाओं को ठीक से समझने के लिए कौन–सा दूसरा रास्ता सुझाएंगे?

पाठ 2 में आपने पढ़ा था कि प्राइमरी स्कूल में बच्चे मूर्त–संक्रियात्मक अवस्था में होते हैं। अपने सीखने वालों को अगली अवस्था तक बढ़ने में मदद देने के लिए आपको ठोस व औपचारिक के बीच की कड़ियों पर ज़ोर देना होगा।

आपको शायद ऐसा लगे कि एक बार यदि बच्ची कोई विशेष अमूर्त अवधारणा या प्रक्रिया समझ गयी है तो उसके बाद उसे अन्य अवधारणाएं या प्रक्रियाएं समझने के लिए ठोस अनुभवों की जरूरत नहीं है। लेकिन ऐसा नहीं है। औपचारिक गणित या मन में हिसाब अच्छी तरह कर पाने के बावजूद भी बच्चों को अवधारणाओं संक्रियाओं, सवालों, आदि को समझने के लिए वास्तविक चीज़ों और अनुभवों की जरूरत पड़ सकती है। उनके विकास का यह पेचदार (spiral) स्वरूप गणित सीखने की प्रक्रिया की विशेषता है।

उदाहरण के लिए, जब दो अंकों वाली संख्याएं सिखायी जाती हैं उससे पहले बच्चों को "स्थानीय मान" समझने की जरूरत होती है। इसके लिए उन्हें समूह बनाने के ढेर सारे ठोस अनुभवों से गुजरने की जरूरत होगी। इससे उन्हें धीरे – धीरे "दहाई" और "इकाई" समझने में मदद मिलेगी। इसके बाद वे छोटी संख्याओं के औपचारिक गुणा और भाग करने के लिए तैयार हो जाएंगे। और फिर उनमें बड़ी संख्याओं के संदर्भ में "स्थानीय मान" की समझ विकसित करने के लिए फिर विभिन्न प्रकार की सीखने के ठोस अनुभवों से गुजरने की जरूरत होगी।

इस तरह से, पहले छोटी संख्याओं और फिर बड़ी संख्याओं के संदर्भ में काम करने से बच्चों को अवधारणा की बेहतर समझ बनाने का मौका मिलता है। उदाहरण के लिए, मान लीजिए एक बच्ची एक नई अवधारणा, जोड़ में क्रमविनिमयता, को समझने की कोशिश कर रही है। शुरू में, इतना काफी है कि वह इस गुण को छोटी संख्याओं से, जिनसे वह पहले परिचित है, के लिए ही समझ ले। अभी वह बड़ी संख्याओं से, जिनसे वह शायद उतनी परिचित न हो, क्यों जूझे?

E7) क्या आप गणित के पाठ्यक्रम के पेचदार विकास के कुछ और उदाहरण दे सकते हैं?

E8) कक्षा 3 के एक बच्चे से $\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$ जोड़ने को कहा गया। उसने $\frac{2}{9}$ लिखा। आपको क्या लगता है कि ऐसा क्यों हुआ ? आप गलती ढूंढने व ठीक करने में उसकी मदद कैसे करेंगे?

E8 में सीखने वाले की मदद करने का एक तरीका है ऐसे इबारती सवालों का इस्तेमाल करना जिनका उसकी दुनिया से ताल्लुक हो। उदाहरण के लिये, यदि आप एक पूर्वस्कूली बच्चे को "दो" का अर्थ सिखाने की कोशिश कर रहे हैं, तो एक अच्छा तरीका होगा कि आप उसे "मुझे दो पेन्सिलें दो" जैसे कई सवाल दें। इस तरह के सवालों को हल करते हुए बच्ची अभ्यास करती है व धीरे–धीरे "दो" का अर्थ पूरी तरह से समझ लेती है। इसी तरह, "तुम्हारे पास पाँच पेन्सिलें थीं, यदि मैने तुम्हें बारह और दीं तो तुम्हारे पास कुल मिलाकर कितनी पेन्सिलें हो जाएंगी?" की तरह के इबारती सवाल करने से बच्चे जोड़ की अवधारणा बनाते हैं।

लेकिन, इबारती सवाल आम तौर पर कक्षा 1 के अंत में कराए जाते हैं। यह शायद इसलिए है क्योंकि हममें से कई लोगों की यह गलत धारणा है कि इबारती सवाल ऐल्गोरिद्मों का अभ्यास कराने का एक तरीका है। बड़ों का तार्किक सोच तय करता है कि औपचारिक प्रतीकों को पहले सिखाना चाहिए। क्या आप इससे सहमत हैं?

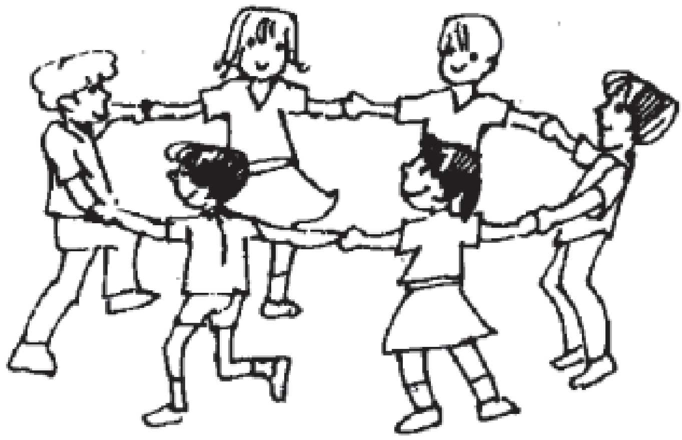
E9) आपको क्या लगता है कि बच्चों को इबारती सवाल कब देने चाहिए – उनके औपचारिक एल्गोरिद्म में निपुण होने से पहले, या उसके बाद ? आपके मत का कारण क्या है?

वैसे तो कोई भी पाठ्य पुस्तक ऐसे किसी एक स्तर से शुरू नहीं हो सकती जो हरेक बच्चे के लिए सही हो। यदि शिक्षक चाहते हैं कि वे गणितीय सोच व क्षमताओं की पक्की नींव बनाएं, तो यह महत्वपूर्ण है कि पूर्वस्कूली व प्राईमरी स्कूल के बच्चों के लिए वे पाठ्य पुस्तक के अलावा अन्य शिक्षण सामग्री का भी इस्तेमाल करें। वास्तव में, अपने आप में गतिविधियों पर आधारित एक पाठ्यक्रम दे देना ही काफी नहीं है। बेहतर यह होगा कि उसके साथ–साथ पाठ्य पुस्तक की जगह एक कार्यपुस्तक (workbook) का इस्तेमाल किया जाए, ख़ास तौर से छोटे बच्चों के लिए।

एक बच्चे को किसी भी अवधारणा को समझने के लिए उसे ठोस अनुभवों से शुरू करके अमूर्त स्तर तक, पहुँचने के लिए सीखने के अनुभव एक क्रम में देने चाहिये। मोटे तौर पर यही क्रम रख कर, इसमें थोड़ी बहुत तब्दीलियाँ की जा सकती हैं। और क्रम के हर चरण में आपको यह जानना जरूरी है कि बच्ची को कितना समझ में आया है।

खेल–खेल में सीखना

बच्चे गणित की कई बुनियादी अवधारणाएं खेलों से सीख सकते हैं। उन्हें जाने पहचाने संदर्भों में खेलने में मज़ा आता है। उनके खेलों से, अपने आप ही, मज़े–मज़े में, बहुत सारी गणितीय गतिविधियां आ जाती है। नए विचारों और अवधारणाओं से छोटे बच्चों का परिचय खेलों व ऐसी परिचित स्थितियों से कराया जा सकता है, जो उन्हें मज़ेदार लगे और जिनसे उन्हें घबराहट या परेशानी न हो। यही बात प्राईमरी के बड़े बच्चों के लिए भी लागू होती है।



चित्र 5 : बच्चे खेल–खेल में गणितीय आकारों के बारे में सीख सकते हैं।

जब छोटे बच्चे चीज़ों को आपस में बांटते हैं वास्तव में वे एक–से–एक का मेल मिलाते है। जब वे गुटकों से खेलते हैं तो वे अलग – अलग आकारों से प्रयोग कर रहे होते हैं। जब वे "पाँच छोटे बंदर" जैसा गाना गाते है तो वे संख्याओं के नाम सीखते हैं।

बच्चों को इबारती खेलों में भी मज़ा आता है। वे आम तौर पर शब्दों के पैटर्न पकड़ने में तेज़ होते है। क्योकि पैटर्न पहचानना गणितीय सोच का मूलभूत पहलू है, बच्चे अपनी भाषा विकसित करने के साथ–साथ वास्तव में गणित भी कर रहे होते हैं।

आप कोई भी गणितीय अवधारणा सिखाने के लिए ढेरों खेल बना सकते हैं। ये खेल या तो पूरी कक्षा के साथ खेले जा सकते हैं, या छोटे समूहों में। खेल ऐसे भी बनाए जा सकते हैं जिनसे बच्चे संबंधित गणितीय भाषा भी साथ ही सीख जाएं।

यहां टीम में खेले जाने वाले कुछ खेलों के उदाहरण दिए जा रहे हैं।

क) एक टीम अपने सामने कुछ कंकड़ रख लेती हैं दूसरी टीम :

पहला खेल– उतने ही कंकड़ रखे, या

दूसरा खेल– गिने और बताए कि वे कितने हैं, या

तीसरा खेल – 14 कंकड (मान लीजिए) करने के लिए जितने भी कंकड़ और चाहिए उतने रखें, या

चौथा खेल – 3 कंकड़ छोड़ कर बाकी उठा लें, आदि।

जैसे – जैसे खेल आगे बढ़ता है आप उन्हें संख्याओं के नाम भी सिखा सकते हैं।

ख) एक टीम दो पासे (बिन्दु या संख्याओं वाले) फेंके और कंकड़ों के ढेर में से उतने कंकड़ उठा ले जितना कि दोनों पासों की संख्याओं का जोड़ हो (या अंतर हो, या गुणा हो)। दूसरी टीम भी ऐसा करे। दो बारियों के बाद जिसके पास भी ज्यादा कंकड़ होंगे वह जीत जाएगा।

यहां भी, खेल के दौरान बच्चे "छः जोड़ दो बराबर आठ" जैसी भाषा से ज्यादा परिचित हो सकते हैं।

ग) कंकड़ों, पासों, टहनियों, कार्डो या मोतियों से आप "स्थानीय मान" सिखाने के लिए खेल बना सकते हैं। 10 कंकड़ों (10 के आधार के लिए) को एक कार्ड या एक मोती के बराबर मान कर, अदला–बदली जा सकती है और इसका लेखा–जोखा रखा जा सकता है। एक बार जब वे दहाईयों की पकड़ ठोस चीज़ों से बना लेते हैं तो उन्हें संख्यांको का इस्तेमाल करने वाले खेलों से भी परिचित करवाया जा सकता है।

उदाहरण के लिए, आप 10–10 कार्डों के दो समूह ले सकते हैं जिन पर 0 से 9 तक के संख्यांक लिखे हों। इन्हें बच्चों की दो टीमें इस्तेमाल करेंगी। बच्चे कार्डो को फेंट कर और उल्टे करके टेबल पर रख दें। फिर वे बारी–बारी से, एक बार में एक कार्ड चुनेंगे और उसे बोर्ड पर "इकाई" या "दहाई" के स्तम्भ में रखेंगे। एक कार्ड जहाँ रखा जा चुका है यहाँ से हटाया नहीं जा सकता। उद्देश्य सबसे बड़ी संख्या बनाना है। वे जो भी नम्बर बनाएं उसे जोर से कह दें। उदाहरण के लिए, यदि पहले समूह का संख्या 3 का कार्ड खुला और उसे उन्होंने दहाई के स्तम्भ में रखा, तो उन्हें जोर से 30 कहना चाहिए, वगैरह।

यह खेल कार्डों की जगह दो पासों से भी खेला जा सकता है।

E10) बच्चों को निम्नलिखित अवधारणा/कौशल सिखाने के लिए एक–एक खेल का उदाहरण लिखें।

i) गुणा,

ii) एक वृत्त क्या होता है,

iii) अन्दाज़ लगाने की क्षमता

यह भी बताएं कि इन अवधारणाओं या कौशलों को सिखाए जाने से पहले आपके हिसाब से बच्चों को क्या आना चाहिए।

नीचे हमने अटकलबाज़ी के कुछ खेलों के उदाहरण दिए हैं। इनसे बच्चों को अपने गणितीय सोच और भाषा का विकास करने के बहुत से मौंके मिलते हैं–

(क) एक टीम संख्या सोच ले और शिक्षक के कान में बता दे। दूसरी टीम को यह संख्या बतानी है। संख्या का अन्दाज लगाने के लिए उन्हें कुछ संकेत दिया जाएगा जैसेः "यह संख्या पाँच और नौ के बीच की एक अभाज्य (prime) संख्या है", या "यह इस कक्षा की लड़कियों का वां हिस्सा है।" क्योंकि बच्चे प्रश्न बना रहें हैं, इसलिए वे उनके स्तर पर ही निर्भर करेंगे।

(ख) एक और खेल में कक्षा के सामने जानी पहचानी चीज़ों का एक ढेर रख दिया जाए। एक टीम या बच्चे (आप जैसे भी खेल खिलाना चाहें) से किसी एक चीज़ को चुनने व उसका नाम शिक्षक के कान में कह देने के लिए कहा जाए। दूसरे बच्चे/समूह बारी – बारी से चुनी हुई चीज़ का अन्दाज लगाएं जिसके लिए वे उसके माप, आकार या दूसरी चीज़ों के सापेक्ष वस्तु का स्थान जैसे संकेतों को आधार बनाएं। जैसे, यह ज्यादा लम्बी है, ज्यादा भारी है, सामने रखी है, यह गोल नहीं है, आदि–आदि।

(ग) आप अटकलबाजी से ऐसे खेलों के बारे में सोच सकते हैं जिनमें अन्दाज़ लगाने वाले कुछ

ऐसे सवाल ही पूछ सकते हैं जिनके उत्तर "हाँ" या "नही" में ही हों। ऐसे खेल बच्चों को विशिष्ट सवालों से (क्यों वह दरवाज़ा है ? किताब है?) ज्यादा व्यापक सवालों (क्या उस पर बैठ सकते हैं ? क्या वह मेरे जितना बड़ा है ? क्या कमरे में एक से ज्यादा हैं ?) की ओर बढ़ने का मौक़ा देते हैं। इससे उत्तर तक पहुँचने के लिए जरूरी प्रश्नों की संख्या कम हो सकती है। जैसे, मान लीजिये कि चुनी हुई चीज़ 1 से 100 के बीच की संख्या है। शुरू में, शायद बच्चे अलग–अलग संख्याएं लेकर पूछें कि क्या वह 4 है, या 26 है, वगैरह। कुछ समय के बाद वे पूछना सीख जाएंगे कि "क्या वह 4 से बड़ी हैं?" "क्या वह सम संख्या है ?" आदि। बाकी बच्चे भी इस तरीके को जल्दी पकड़ लेंगे। या, मान लीजिये, चुनी हुई वस्तु एक बेलनाकार डिब्बा है। तब प्रश्नों में गणित की शब्दावली आ जाएगी जैस – क्या वह गोलाकार है? क्या वह किसी रेखा के प्रति सममित है ? क्या उसमें 4 कोण हैं?

ऐसे खेल बच्चों की व्यापकीकरण करने, विशिष्टीकरण करने, अन्दाज लगाने व पैटर्न पहचानने की क्षमताएं विकसित करके उनके गणितीय सोच का विकास करते हैं। यानि कि, वे सब उनकी गणितीय सोच व तार्किक क्षमता बढ़ाते हैं।

और बच्चों में गणित की समझ बढ़ाने के लिए सामूहिक नृत्य और खेल–कूद की गतिविधियों, वगैरह के इस्तेमाल के बारे में आप क्या सोचते है? अब आप ऐसे ही कुछ उदाहरण दीजिए।

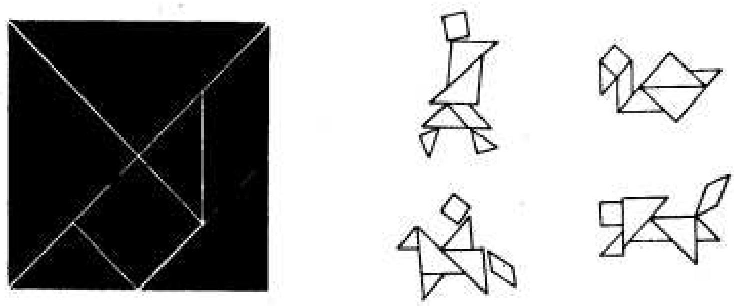
E11) बच्चों को समय के अन्तराल की अवधारणा से परिचित कराने के लिए अटकलबाजी का एक खेल बनाएँ।

E12) आप ज्यामिति की अवधाणाएँ सिखाने के लिए सामूहिक नृत्य का उपयोग कैसे करेंगे?

चित्र 6 : बच्चे गणितीय कुशलताएँ ओरीगामी से सीख सकते हैं।

बहुत सारी अन्य मज़ेदार गतिविधियों का उपयोग बच्चों को ज्यामिति की विभिन्न अवधारणाओं से परिचित कराने के लिए किया जा सकता है। जैसे, बच्चे सममिति (symmetry) के बारे में "रंगोली" के सममित (symmetrical) पैटर्न काग़ज पर बना कर सीख सकते हैं।

ओरीगामी, यानि कागज़ मोड़ने की कला, के द्वारा अलग–अलग दो व तीन–आयामी आकारों से उनका परिचय कराया जा सकता है। सिखाते वक्त, हर कदम पर शिक्षक गणित की शब्दावली पर जोर दे सकती है जैसे, "अब कागज़ को मोड़कर आधा करो", "फिर मोड़कर इससे एक वर्ग बनाओं", "जब तुम इस कोने को इस तरह से मोड़ोगे (दिखाकर), यह एक **त्रिभुज** बन जाएगा।" **टैनग्राम** का इस्तेमाल भी इसी उद्देश्य के लिए किया जा सकता है।



(क) (ख)

चित्र 7 : (क) एक टैनग्राम, (ख) टैनग्राम से बने कुछ आकार

अभी तक हमने ठोस से अमूर्त की ओर बढ़ना, ठोस विधि पर खूब लगाना, और गणित पढ़ाने के लिए मज़ेदार गतिविधियों का इस्तेमाल करना– इन बातों के महत्व पर जोर दिया। सीखने का माहौल बनाने के लिए यह सब काफी नहीं है।

सीखने में मददगार अन्य तरीके

इस खंड में हम ख़ास ध्यान तीन बातों पर देंगे– दोहराव की जरूरत, दूसरे बच्चों से सीखना और गलतियों का इस्तेमाल करके सीखना।

जरूरी नहीं कि दोहराव उबाऊ हो

बहुत छोटी उम्र से ही बच्चे कई बातों को दोहराते हैं और इससे सीखते हैं, जैसे, चीज़े गिराना व उठाना, डिब्बे और टीन खोलना और बन्द करना, कुछ शब्दों को बार–बार दोहराना, ताक–झाँक का खेल बार–बार खेलना, बड़ों से बार–बार कहानियाँ दोहराने को कहना, आदि। क्या आप इनमें से किसी भी काम को रट कर सीखना कहेंगे ? यानि कि,

दोहराव का मतलब रटना नहीं है।

दोहराने के ऐसे कई नए तरीके सोचे जा सकते हैं, जिनसे कि वह मज़ेदार बनाया जा सके। इसे बच्चे मज़ेदार गतिविधियों के द्वारा कर सकते हैं, जिनमें से कुछ की शुरूआत वे खुद भी कर सकते हैं। इन दोहरावों के दौरान भाग लेने वाले बच्चे हर बार कुछ नया व फर्क देखते और अनुभव करते हैं।

दूसरी तरफ, रट कर सीखने में इस तरह की विभिन्नता नहीं होती क्योंकि उसमें प्रक्रिया का दोहराव नहीं होता, बल्कि "जानकारी" ही मशीनी तरीके से दोहराई जाती है (उदाहरण के लिए, पहाड़े मशीनी तरीके से रट कर याद करना।)

अगर आप आस–पास देखें तो आप पाएंगे कि किसी भी बच्चे के माहौल में दोहराव स्वाभाविक तौर पर अलग–अलग रूपों में होता है। लेकिन सीखने के औपचारिक माहौल में, बच्चों की रूचि बनाए रखने के लिए, दोहराव को काफी विविधता के साथ जानबूझ कर लाना पड़ता है। आप इस चुनौती को कैसे पूरा करेंगे ? शायद नीचे दिया गया उदाहरण हमें कुछ विचार दे।

बच्चे आम तौर पर पहाड़ों से बहुत परेशान रहते हैं। क्या यह सचमुच जरूरी है कि उन्हें मशीनी तरीके से बार–बार दोहराया जाए? और क्या रटकर याद करने से बच्चे को पहाड़ों को समझने में मदद मिलती है ? क्या यह सच नहीं है कि एक दिए हुए क्रम में पहाड़ों का इस्तेमाल कर ही नहीं पाते। यह बात साफ नज़र आती है जब आप किसी और क्रम में उनसे गुणज पूछें। क्या यह बेहतर नहीं है कि किसी बात को सिर्फ

रटवाने की बजाय बच्चे को उसमें शामिल पैटर्न पहचानने में मदद की जाए? बच्चों के दिमाग़ में गुणज की समझ बैठाने के लिए और पहाड़ों में शामिल पैटर्नों को पहचानने की क्षमता विकसित करने के लिए आप कई गतिविधियां सोच सकते हैं। उदाहरण के लिए, बच्चों से दो–दो, चार–चार, पांच–पांच सेबों के समूह को पहचानने के लिए कहा जा सकता है। और फिर उनसे "चार–चार सेबों वाले कितने समूह हैं?", "ये कुल कितने सेब हुए?" जैसे सरल सवाल पूछे जा सकते हैं। और इस तरह की गतिविधि तरह–तरह की चीज़ों से की जा सकती हैं।

E13) आप बच्चों की पाँच–पाँच और दस–दस के समूह बनाने में मदद के लिए कक्षा में की जाने वाली किस तरह की गतिविधियाँ सोच सकते है?

जब उनको इस तरह की गतिविधियों का काफी अभ्यास हो जाए, तब वे जो कर रहे हैं उसे गणितीय भाषा में लिखने के लिए उनकी मदद की जा सकती है। जैसे, वे दो–दो सेबों वाले 4 समूहों को $4 \times 2 = 8$ लिख सकते हैं। इसे चित्र द्वारा भी दिखा सकते हैं।

अब बच्चे पहाड़ों में मज़े से पैटर्न ढूंढ पाने की स्थिति में होंगे। आप उनसे 10×10 को ग्रिड पूरा करने को कह सकते हैं। हर खाने में बच्चे को खाने की लाइन की संख्या और उसकी स्तम्भ की संख्या का गुणनफल भरना होगा।

इस तरह की गतिविधि कुछ लम्बे समय तक की जा सकती है। बच्चों को या तो उतना समय दिया जा सकता है जितना उनको चाहिये या जितने समय तक उनकी रूचि गतिविधि में बनी रहे। उन्हें आपस में बात करने दें और पैटर्न खुद ही खोजने दें।

E14) यह देखने की कोशिश कीजिए कि अलग–अलग बच्चे किस क्रम में संख्याएं ग्रिड में भरते हैं। मेरा दावा है कि सभी बच्चे पहले एक, पाँच और 10 के सारे गुणनफल भरेंगे। आप मेरे इस दावे की जांच कीजिए। क्या आपके इस दावे को गलत साबित करने वाला कोई प्रमाण मिला।

E15) क्या दोहराव के द्वारा बच्चों की समय की अवधारणा समझने में मदद की जा सकती है ? इसके लिए एक ऐसी गतिविधि को विस्तार से लिखकर बताइए जो पाँच बच्चों के एक समूह को दी जा सके।

बच्चे एक दूसरे से सीखते हैं

एक दिन मैं पास के ही एक स्कूल में, शिक्षक और बच्चों के बीच किस तरह की परस्पर क्रिया होती है, यह देखने गयी थी। बच्चों को उनकी शिक्षक ने एक सवाल दिया हुआ था, और वे अपनी कॉपी में उसे हल करने में लगे हुए थे। शिक्षक बच्चों के बीच घूम रही थी और रूक–रूक कर उनसे पूछ रही थी कि कोई एक जवाब उन्होंने कैसे निकाला । ऐसा करने में अधिकतर बच्चों ने अपना लिखा हुआ हल बताया व सवाल हल करने की अपनी क्षमता में आत्मविश्वास की कमी नहीं दिखाता हैं। आत्मविश्वास की यह कमी बड़ों में भी होती है जब उनका किसी विशेषज्ञ से सामना होता है।

जिन बच्चों में सोचने की अपनी क्षमता पर भरोसा नहीं होता, उन्हें बाद में इस क्षमता को विकसित करने में दिक्कत होगी। इसलिए यह जरूरी है कि सीखने का माहौल ऐसा बनाया जाए जिससे बच्चों का आत्मविश्वास बढ़े।

लेकिन यह हम कैसे कर सकते हैं ? यदि समूहों में खेलते हुए बच्चों को आप ध्यान से देखें तो आपको शायद कुछ संकेत मिल जाए। बच्चे जब एक साथ खेलते हैं तो वे एक दूसरे की सोच जाँचते रहते हैं। खेलों व गतिविधियों से बच्चों को एक दूसरे से, बिना किसी डर के, एक आज़ाद और खुले माहौल में मेल–जोल का मौका मिलता है। ऐसे मेल–जोल के दौरान बच्चे अपनी बातों को एक दूसरे के सामने जवाबों और सुझावों

के तौर पर रखते हैं। एक बच्चे के लिए दूसरे की बात की अहमियत इतनी ही होती है जितनी कि एक राय की होती है जिसे जाँच कर माना भी जा सकता है, या नहीं भी।

दूसरी तरफ, कोई बड़ा, आम तौर पर बच्चों के सामने अपना मत एक "सच्चाई" के रूप में रखता है, जिसे बिना किसी सवाल या शक के मानना पड़ता है। यदि बड़े के कथन को बच्ची शक से देखे या सोच में पड़ जाए, तो बड़ा अपने कथन को दोहराता है, पहले धीरज से, फिर चिड़चिड़ाकर, और अन्त में, गुस्से से। अंतिम निष्कर्ष होता है, "मूर्ख ! तुम यह भी नहीं समझ सकते !" बच्ची, जो पहले से ही यह समझती है कि वह बड़े के सामने कुछ भी नहीं है अपने बारे में यह राय मान लेती है, और उसका आत्मविश्वास कम होने लगता है।

इसीलिए, सीखने के लिए, बिना डर के आपसी मेल–जोल होना बहुत जरूरी है। इस तरह का मेल–जोल अन्य कारणों से भी महत्वपूर्ण है।

E16) क्या आप बच्चों के आपसी मेल–जोल और एक दूसरे से सीखने के और फायदे सोच सकते हैं?

यदि आप इससे सहमत हैं कि बच्चे एक–दूसरे से बहुत कुछ सीखते हैं, तो हम उन्हें ज्यादा से ज़्यादा ऐसे मौके किस तरह दे सकते हैं? महत्वपूर्ण बात यह है कि ऐसी परस्पर क्रियाएँ अनौपचारिक हों, मज़ेदार हों और बिना किसी डर के हों। एक बच्चे से सिर्फ यह कह देना कि, "तुम अपने पड़ौसी/दोस्त/भाई/बहन को पढ़ा दो" आम तौर पर कारगर नहीं होता। यह इसलिए क्योंकि तब बाल–शिक्षक बड़ों की नक़ल करने की कोशिश करता है, और सीखने वाला उतना ही घबरा जाता है जितना कि बड़े से।

बच्चे एक–दूसरे से सीख पाएं ऐसी स्वाभाविक और निकलने लायक परिस्थिति बना पाना आसान नहीं है। शायद, बच्चों को बिना उनकी जानकारी के, स्वाभाविक तरह से मिलते–जुलते खेलते, बात करते हुए देखना चाहिये। इससे शायद हमें कुछ तरीका समझ में आए कि कक्षा में ऐसी स्थितियाँ बनाई जा सकती है कि बच्चे एक दूसरे से सीख सकें।

E17) कुछ बच्चों की स्वाभाविक परस्पर क्रिया को देखने के बाद, इसकी वे विशेषताएँ लिखिये, जिनके कारण बच्चों का एक – दूसरे से सीखने का तरीका, अन्य तरीकों से बेहतर साबित होता है।

ग़लतियां उपयोगी होती हैं

बच्चों को पढ़ाने के दौरान आपने पाया होगा कि बच्चे तमाम ग़लतियां करते हैं। ग़लतियाँ होने पर आप क्या करते हैं? इनसे आपके बच्चे के बारे में क्या पता चलता है – सीखने में असफलता, या समझने की एक कोशिश? या दोनों? यदि ऐसा है, तो इन दोनों में अंतर कैसे करते हैं और कैसे तय करते हैं कि किसी ख़ास परिस्थिति में क्या है?

बच्चों की ग़लतियां उनकी सीखने की प्रक्रिया का स्वाभाविक और जरूरी हिस्सा है। नई अवधारणाओं को समझने की प्रक्रिया में बच्चे अपनी अभी तक की समझ को लागू करते हैं। हो सकता है कि यह औपचारिक शिक्षण के तरीके व विषयवस्तु से मेल न खाएँ।

बच्चों की गलतियां से यह भी पता चलता है कि बच्चे कैसे सोचते और सीखते हैं। जैसे, 51 के लिए 15 लिखना हमें यह बताता है कि बच्ची अभी भी स्थानीय मान की अवधारणा समझ नहीं पाई है, और उसे समूह बनाने का और करने की जरूरत हैं।

बच्चें की ग़लती को इस तरह से ध्यान से देखने से शिक्षक को सीखने वाले का गणितीय सोच विकसित करने में बहुत मदद मिल सकती है। गलतियां करना और उनसे सीखना एक पक्की समझ बनाने की प्रक्रिया का हिस्सा है। बल्कि, यह सही उत्तर निकालने से ज्यादा महत्वपूर्ण है। दुर्भाग्यवश, परम्परागत शिक्षक अभी भी यही मानते हैं कि सीखना केवल तभी होता है जब सही उत्तर दिए जाएं।

चित्र 8 : बच्चों की गलतियों उनकी दुनिया में झांकने का मौका देती है।

E18) एक पांचवी की बच्ची "3 ÷ — = — 3 / 2" में रिक्त स्थान में 9 / 2 भरती है। आपके हिसाब से यह ग़लती क्यों हुई ? आप इस स्थिति को कैसे सुधारेंगे?

सारांश

इस पाठ मे हमने मुख्य रूप से इस बात पर चर्चा की है कि प्राइमरी स्कूल के बच्चों के लिए गणित सीखना किस प्रकार ज्यादा अर्थपूर्ण बनाया जा सकता है। इसके लिए हमने कई उदाहरण दिए हैं यह दिखाने के लिए कि बच्चे कैसे सीखते हैं और हम कैसे उनके लिए उचित खेल और गतिविधियां बना सकते हैं। हमने उदाहरणों से यह दिखाया है कि गणित सीखने की प्रक्रिया का बच्चों के सोचने के ढंग से गहरा संबंध है। हमने ख़ास तौर पर नीचे दिए गए मुद्दों पर ज़ोर दिया है।

1) बच्चे मानसिक समझ के निश्चित स्तर और जानकारी के साथ आपके पास आते हैं। आपको इसे आधार मानकर आगे बढ़ने की जरूरत है।

2) गणितीय सोच से संबंधित कुशलताओं, जैसे संबंध बनाना, विशिष्टीकरण और व्यापकीकरण करना, परिकल्पना बनाना और उसे सिद्ध करना या उसका खंडन करना, को विकसित करने में बच्चों की मदद करनी चाहिए।

3) ठोस चीज़ों का इस्तेमाल करते हुए औपचारिक गणित को बच्चों की सहज समझ से जोड़ना चाहिए।

4) एक बच्चे को गणित पढ़ाते समय हमें सीखने के अनुभवों को बच्चे के विकास के स्तर के अनुसार क्रमवार करना चाहिए, न कि केवल विषयवस्तु के अनुसार। मोटे तौर पर यह क्रम इस प्रकार हैः

   अनुभव – भाषा – चित्र से दिखाना – प्रतीक

5) किसी भी नई अवधारणा की अच्छी समझ बनाने के लिए दोहराव जरूरी है। दोहराव को आप रूचिकर बना सकते हैं। दोहराव और रटना एक बात नहीं है।

6) बच्चे अपने साथ के बच्चों से आसानी से सीखते हैं क्योंकि आम तौर पर वे एक दूसरे से डरते नहीं हैं।

7) बच्चों की ग़लतियों का विश्लेषण करना व पढ़ाने में उनका उपयोग करना जरूरी है।

पाठ–15
कक्षा का कामकाज

पिछली इकाइयों से आप जान ही चुके हैं कि स्कूलपूर्व और प्राथमिक स्तर पर गणित शिक्षण को निम्नलिखित संदर्भों में समझना जरूरी है :

- गणित सीखने का महत्व,
- बच्चों की सोचने व सीखने की प्रक्रियाएं, और
- सिखाने के तरीकों पर इन प्रक्रियाओं का असर।

अभी तक हमने इस बात पर ध्यान केंद्रित किया कि बच्चे गणित कैसे सीखते हैं और शिक्षक होने के नाते हम इस प्रक्रिया को रोचक व सार्थक कैसे बना सकते हैं। हमने देखा कि बच्चों की सीखने के लिए ठोस अनुभवों तथा एक सार्थक संदर्भ की जरूरत होती है। हमने यह भी देखा कि वे खेल के जरिये व बारम्बार दोहराव के द्वारा सीखते हैं। सीखना बच्चों के लिए एक तरह से चीज़ों के बारे में समझ बनाना है। वे अब तक जो कुछ जान चुके उसी पर अपनी समझ को बो बढ़ाते हैं। वे अपने हर अनुभव से कुछ सीखते हैं।

इस पाठ में हम सबसे पहले उन सिद्धान्तों की सूची बनाएंगे जिनके आधार पर प्राइमरी स्तर पर गणित सीखने का काम कारगर ढंग से किया जा सकता है। सवाल यह है कि हम अपनी समझ को कक्षा में असरदार शिक्षण के लिए कैसे इस्तेमाल कर सकते है ? इस इकई में हम इस सवाल पर विस्तार से विचार करेंगे।

सीखने के लिए प्रभावी माहौल बनाने के निम्नलिखित पहलुओं पर हम मोटे तौर पर विचार करेंगे :

क) बच्चों के मनोवैज्ञानिक, सामाजिक व संज्ञानात्मक विकास के मुताबिक गणितीय अवधारणाओं को क्रमबद्ध करना।

ख) आसानी से मिलने वाली सामग्री के इस्तेमाल से ऐसी उपयुक्त गतिविधियों की रचना करना जिनसे बच्चों को गणित की विभिन्न अवधारणाएं और कौशल सीखने में मदद मिले।

ग) बच्चों द्वारा सीखी गई बातें और सीखने–सिखाने की प्रक्रिया, दोनों के मूल्यांकन के तरीके विकसित करना।

गणित सीखना : हमने अभी तक जितना पढ़ा है, उसी में से ये बातें उभरती हैं।

1) **गणित सीखना सार्थक होना चाहिए।**

सीखना सार्थक तब होता है जब बच्चों को अपनी समझ बनाने का मौक़ा मिले, और जो कुछ वे सीखें उसे अपने रोजमर्रा के अनुभवों से जोड़ सकें। इसके अलावा, उनसे यह नहीं कहा जाना चाहिए कि वे आंख मूंदकर किसी ऐल्गोरिद्म को लागू करें। उन्हें यह पता होना चाहिए कि किसी नियम का इस्तेमाल क्यों किया जा रहा है।

2) **गणित सीखना एक विकास प्रक्रिया है।**

सीखना तभी असरदार होता है जब शिक्षक बच्चों को उनके विकास के स्तर के मुताबिक गणित को खोजने और महसूस करने के लिए एक सही माहौल दे सके। गणित सीखने के लिए अमूर्त विचारों को समझने व आत्मसात् करने की क्षमता की जरूरत होती है। लेकिन बच्चों अमूर्त विचारों से निपटने की क्षमता धीरे–धीरे विकसित होती है। ख़ासकर प्राइमरी स्कूल के बच्चे मूर्त–संक्रियात्मक अवस्था में होते है। वे सिर्फ उन प्रतीकों का इस्तेमाल कर पाते हैं जो उनको सार्थ लगें। गणित का

जो ज्ञान विकसित किया जा रहा है, यदि ये प्रतीक उससे (ठोस और/या मानसिक रूप से) सीधे जुड़े हों, तो इनका अर्थ खुद–ब–खुद जाहिर हो जाएगा। इस कड़ी को जोड़ने में ठोस चीज़ों की मौजूदगी से मदद मिलती है। यदि सीखने की उपयुक्त ठोस स्थितियां मिलें तो प्राइमरी स्कूल के बच्चे तस्वीरों व रेखाचित्रों के माध्यम से आसानी से प्रतीात्मक स्तर पर पहुंच जाते हैं।

3) गणित का सीखना पहली सीखी गई बातों पर आधारित होना चाहिए।

किसी बच्ची को गणित सिखाते समय, हमें पहले यह मालूम करना चाहिए कि वह पहले से कितना जानती है और क्या–क्या कर सकती है। हमें उस गणितीय अवधारणा से भी जोड़ना होगा जिसे हम आगे पढ़ाने जा रहे हैं ताकि सीखने की प्रक्रिया सार्थक रहे और उसमें दिक्कत पैदा न हो।

4) गणितीय अवधारणाओं को क्रमबद्ध ढंग से पेश करना चाहिए।

गणितीय अवधारणाओं की प्रकृति सीढ़ीनुमा होती है जिसमें पायदानों का एक निश्चित क्रम होता है। इसलिए गणितीय अवधारणाएं और कौशल सिखाने के लिए इन्हें सिलसिलेवार क्रम में देना बहुत है। यहां तक कि जी सवाल पूछे जाएं उनका चुनाव भी बहुत सोच समझकर करना होगा ताकि लिए जरूरी तार्किक सोच बच्चे समझ सकें।

5) गणित सीखने में बच्चों की सक्रिय भागीदारी हो।

सक्रिय भागीदारी का मतलब है कुछ करना, चीज़ों व घटनाओं का अवलोकन करना, तुलना करना, सवाल पूछना, पैटर्न खेजना, वर्गीकरण करना, व्यापकीकरण करना, सवाल बनाना और उन्हें हल करने की कोशिश करना, वगैरह। बच्चे जो कुछ सीख रहे हैं उसकी समझ बनाने में सक्रिय भागीदारी से उन्हें बढ़ावा मिलता है, और इस तरह वे गणित की बेहतर समझ विकसित कर पाते हैं। शिक्षण की यह चुनौती है कि बच्चों को ऐसे अलग–अलग तरह के अनुभव दि जाएं जो उनकी सक्रिय भागीदारी को बढ़ावा दें और पुरस्कृत करें।

6) गणित की भाषा बोलना सीखने का एक जरूरी हिस्सा है।

जिन गणितीय बातों को सीख रहे हैं उनसे जुड़े शब्दों का इस्तेमाल करना गणितीय सोच विकसित करने के लिए निहायत जरूरी है। बच्चों को हर स्तर पर गणितीय विचारों के बारे में बोलने के भरपूर अवसर मिलने चाहिए। उन्हें यह सीखना चाहिए कि मौखिक रूप से गणितीय शब्दों और मुहावरों का इस्तेमाल कैसे किया जाता है। इसके बाद ही उम्मीद की जा सकती है। कि वे गणित को प्रतीकों से दर्शा पाएंगे। जिस तरह से पढ़ने व लिखने से पहले बोलना आता है, ठीक उसी तरह से गणित की मौखिक भाषा उसे प्रतीकात्मक तरीके से दर्शाने के पहले आती है।

7) गतिविधियों व खेलों में हिस्सा लेने से गणित सीखने में मदद मिलती है।

गणितीय सोच का विकास तब होता है जब बच्चों को चीज़ों से खेलने का मौका मिले और उनके सामने गणितीय समस्याएं सार्थक व ठोस संदर्भ में रखी जाएं। गणितीय अवधारणाएं अमूर्त होती हैं। उपयुक्त खेलों और शिक्षण सामग्री के कारगर इस्तेमाल से बच्चों को गणित अनुभव करने में और सीखने में मदद मिलती है।

E1) क) ऊपर दी गई सूची में आप और क्या जोड़ना चाहेंगे ?

ख) अभी तक आपने जिस ढंग से बच्चों को गणित पढ़ाया है, उसके तीन ऐसे पहलू बताइए जो ऊपर लिखे सिद्धातों से मेल न खाते हों।

आपने शायद ध्यान दिया होगा कि उपर्युक्त सिद्धात एक–दूसरे से सम्बंधित हैं। अमूर्त रूप में गणित करने से पहले उसके बारे में बोलने के मौके प्रतीकात्मक रूप से समझने से पहले गणित को अनुभव करने के मौके और गणित को अपने माहौल व विकास स्तर से जोड़ने के मौके मिलकर ही सीखने का एक माहौल बनाते हैं।

इसलिए हमारा सबसे अहम उद्देश्य यह है कि बच्चे इस योग्य हो सकें कि गणित सीखने के तरीक़ों को सीख सकें, उन्हें इस बात के प्रति सजग बनान है कि वे किसी तरीके का इस्तेमाल क्यों करते हैं और कब किस तरीके का इस्तेमाल किया जाए। इस इकाई के बाकी हिस्से में इस बात पर गौर करेंगे कि इस लक्ष्य तक पहुंचने के लिए उपयुक्त सिखाने के तरीके कैसे विकसित किए जाएं।

शिक्षण योजना

पिछले पाठ में हमने उन सिद्धातों की सूची बनाई जो सीखने – सिखाने के कारगर तरीकों को बनाने के आधार हैं। क्या यह मुमकिन है कि लगातार, सावधानीपूर्वक और व्यवस्थित योजना बनाए बग़ैर आप इस्तेमाल कर सकें ?

इस सवाल का जवाब देने से पहले आपके सामने यह साफ होना चाहिए कि योजना बनाने से आपका मतलब क्या है। क्या इसका मतलब यह है कि आप गणित की पाठ्य पुस्तक एक–एक अध्याय पढ़ाते चले जाएं? या इसका मतलब यह है कि हर पाठ को व्यवस्थित तरीके से पढ़ाया जाए? क्या इस योजना में प्राइमरी स्कूल के पूरे पाठ्यक्रम से जुड़े और पाठ्यक्रम की विषयवस्तु को कारगर ढंग से लागू करने से जुड़े मुद्दे शामिल होंगे?

दरअसल पाठ्यक्रम नियोजन के कई चरण होते है, जिसमें पहला है यह तय करना कि कौन सी विषयवस्तु पढ़ाई जाएगी। इसके बाद यह तय किया जा सकता है कि आप बच्चों में कौन सी क्षमताएं विकसित करने की उम्मीद रखते हैं। इसके बाद ही किसी भी विशिष्ट गणितीय अवधारणा सिखाने के लिए आप पाठ की योजना बनाने का काम कर सकते है। आगे आने वाले उपभोगों में हम इन चरणों पर विस्तार से बातचीत करेंगे।

योजना क्यों बनाए?

बच्चे बढ़िया ढग से तब सीखते हैं जब पाठ को इस ढंग से सावधानी पूर्वक व्यवस्थित किया जाए कि सीखने की क्रिया दिलचस्प बने। ऐसे सवालों से उन्हें सीखने में मदद मिलती है जो उन्हें सोचने के लिए प्रेरित करें। इसके अलावा ऐसी सामग्री और गतिविधियों का इस्तेमाल उपयोगी होता है जिनसे विचार विकसित हों और अभ्यास का मौका मिले। दूसरी ओर आपको कक्षा की सच्चाइयों का भी सामना करना होता है। इन सच्चाइयों में सामाजिक, आर्थिक और ढांचगत भिन्नताओं के अलावा पाठ्यवस्तु को लागू करने और मूल्यांकन से जुड़े मुद्दे भी शामिल हैं। इसलिए, अगर आप पिछले पाठ में दिए गए सिद्धातों को स्वीकार करके उन्हें लागू करना चाहेंगे, तो हो सकता है आपको सामने नीचे दिए गए कुछ सवाल खड़े हों :

- अगर मैं चाहूं कि बच्चे वास्तव में सीखे तो सिलेबस (syllabus) कैसे पूरा होगा ?
- अगर पाठ्यपुस्तक के मुताबिक चलना है तो गणित सीखने के सिद्धातों का पालन कैसे करूं ?
- अगर बच्चों की भागीदारी बढ़ाऊं, तो कक्षा में शोरगुल कैसे रोकूं ?
- जब स्कूल में इतने कम साधन हैं, तो बच्चों के लिए ठोस चीज़ों का बन्दोबस्त कैसे करूं?
- बच्चों के विकास की जरूरतों में इतना अन्तर है; तो सब बच्चों की जरूरतें कैसे पूरी करूं?
- मुझे कैसे पता चले कि मेरा सिखाने का तरीका कारगर है?

इनमें से ज्यादातर सवालों से निपटा जा सकता है, बशर्ते कि आप अपने पाठ्यक्रम की, उसे लागू करने की और मूल्यांकन प्रक्रिया की योजना बना लें।

आप कहेंगे कि योजना बनाना तो ठीक है, लेकिन कई बार ऐसी बातें सामने आ जाती है जिन पर हमारा कोई काबू नहीं रहता, जैसे कि अचानक होने वाली छुट्टियाँ, बच्चों की बीमारी, फसल कटाई की वजह से बच्चों की गैर हाजरी, वगैरह। सही है, योजना और असलियत के बीच अक्सर अन्तर पड़ जाता है। दरअसल यह सब योजना बनाने की प्रक्रिया का हिस्सा है। इससे हमें बच्चों के साथ अपने कामकाज को व्यवस्थित करने में मदद मिलती है, जिससे उन्हें सीखने में बढ़ाया मिलता है। ऐसा करने से हमें इस बात पर भी ग़ौर करने का मौका मिलता है कि हम क्या कर हैं। इससे आम तौर पर हमारी सिखाने की क्षमता बेहतर हो जाती है।

कक्षा में जो परिस्थितियां हो सकती हैं और होती हैं, उनसे निपटने का कोई ऐ ही तरीका नहीं है। हर बार जब हम समस्या से निपटने का कोई तरीका अपनाते हैं और बाद में उन तरीके को चुनने के कारणों पर ग़ौर करते हैं, तो इससे सामूहिक सोच की हमारी क्षमता बेहतर बनती है।

E2) निम्नलिखित में से कौन से ऐस कथन हैं जिनमें योजना बनाने के अच्छे कारण नज़र आते है ?

क) योजना बनाने से लक्ष्यों को स्पष्ट करने में मदद मिलती है।

ख) योजना बनाने से सुनिश्चित हो जाता हैं कि विषय वस्तु के सारे जरूरी पहलू शामिल कर लिए गए हैं।

ग) योजना बनाने से समय को जरूरत के मुताबिक बांटा जाता है।

घ) योजना बनाने से सीखने के लिए जरूरी अनुभवों को क्रमबद्ध करने में मदद मिलती है।

ड) योजना बनाने से बच्चों की दिलचस्पी व ध्यान लगाए रखने में मदद मिलती हैं।

च) योजना बनाने से गैर–जरूरी दोहराव से बचा जा सकता है, और अभ्यास के लिए जरूरी दोहराव कराया जा सकता है।

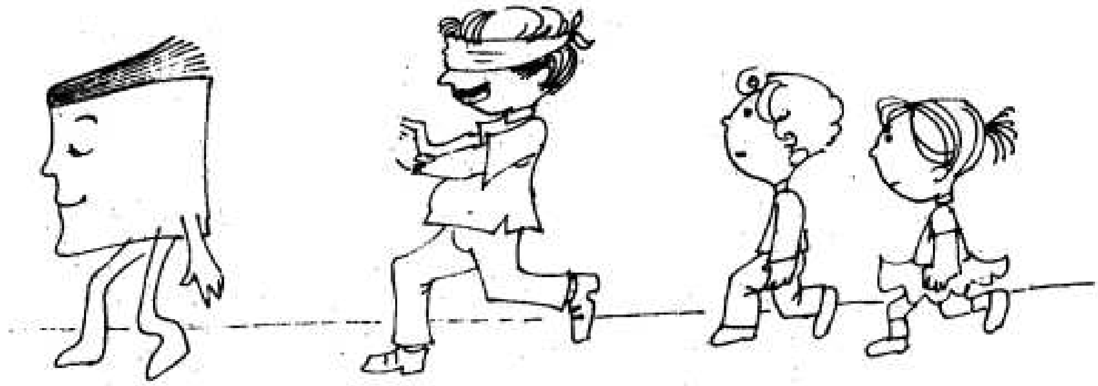
छ) योजना बनाने से शिक्षक का आत्म विश्वास बढ़ता है, और उसे अपने काम से खुशी मिलती है।

E3) E2 में दिए गए कारणों के अलावा क्या आप पाठ्यक्रम योजना बनाने के कोई और कारण सोच सकते हैं ?

अभी तक हमने यह चर्चा की कि शिक्षण योजना बनाने की जरूरत क्या है। आइए अब देखें कि योजना कैसे बनाई जा सकती है।

योजना कैसे बनाएं?

मान लीजिए कि आपका कक्षा 3 को गणित पढ़ाने को कहा जाता है। आप यह कैसे करेंगे? एक तरीका तो यह होगा कि आप कक्षा 3 की गणित की पाठ्य–पुस्तक उठा लें और आंख मूंदकर एक–एक अध्याय पढ़ाना शुरू कर दें।



चित्र 1 : शिक्षक आंख मूंदकर पाठ्य–पुस्तक का अनुकरण करते हुए।

अगर ऐसा है तो आपके प्रमुख उद्देश्य होंगे :

क) पाठ्य–पुस्तक को पूरा करना। मतलब यह हुआ कि पाठ्य–पुस्तक को ही आप सिलेबस के बराबर मान रहे हैं। आम तौर पर यही होता भी है क्योंकि शिक्षक के पास पाठ्य–पुस्तक के अलावा कोई और शिक्षण साधन नहीं होता।

ख) साल के आख़िर में बच्चों का मूल्यांकन करके यह पता लगाना कि पाठ्य–पुस्तक की कितनी विषयवस्तु उन्हें याद है।

ज्यादातर शिक्षक इन्हीं तरीकों को अपनाते है। इसके लिए योजना बनाने की जरूरत न के बराबर होती है। वे यह मानकर चलते हैं कि हर किस्म की कक्षा व स्कूल के सभी शिक्षकों के लिए और हर तरह के बच्चों के लिए पाठ्य–पुस्तक में दी गई योजना उचित है। इस तरह के रवैये में योजना बनाने से सम्बंधित सारे मद्दों, जैसे सिखाने के तरीके, अवधारणाओं को क्रमबद्ध करना और उन्हें सिखाने के लिए समय तय करना, आदि का पका–पकाया जवाब मिल जाता है क्योंकि

- इसके तहत गणित की अवधारणाएं/विषय एक निर्धारित क्रम में पढ़ाए जाने हैं (शिक्षक के सिर्फ पृष्ठ–दर–पृष्ठ पाठ्य–पुस्तक का पालन करना है)।
- सिखाने का तरीका सिर्फ बच्चों से किताब में दिए सूत्र, उदाहरण और अभ्यास के सवालों को कराना रह जाता है।
- समय विभाजन का आधार आम तौर पर यह हो जाता है। कि कुल अध्यायों की संख्या को स्कूल खुला रहने के कुल महीनों से भाग दे दिया जाए। इससे यह तय हो जाता है कि एक महीनें में कितने अध्याय पूरे करने हैं।

पाठ्य–पुस्तक से पढ़ाने का दूसरा तरीका हो सकता है कि आप खुद पहले इसको पढ़ लें और फिर गणित सीखने सिद्धातों के मुताबिक हर पाठ की योजना ध्यान से बनाएं। इसके लिए जरूरी होगा कि आप सावध ाानी से हर पाठ को देखकर ऐसी योजना बनाएं जिसके मुताबिक :

i) **पढ़ाने का क्रम बच्चों के विकास स्तर से मेल खाता** हो। ज़्यादातर मामलों में इसका मतलब यह होता है कि पाठ्य–पुस्तक की पूरी सामग्री को नए क्रम में जमाया जाए। मिसाल के तौर पर, ज्यादातर पाठ्य–पुस्तकों के हिसाब से जोड़–घटा जैसी क्रियाएं सिखाने से पहले बच्चों को 1 से 100 तक की संख्याएं सिखानी चाहिए। लेकिन वास्तव में बच्चे 100 तक की संख्याओं के नाम याद करने से बहुत पहले ही जोड़–घटा की कुछ समझ बना चुके होते हैं। दरअसल जोड़–घटा के माध यम से उन्हें अलग–अलग आकार (साइज) के समूहों की आपसी तुलना करने में और संख्या की कुछ समझ बनाने में मदद मिलती है। इनसे गिनती के अभ्यास का भी एक बढ़िया संदर्भ बनता है। इसलिए बेहतर होगा कि जब बच्चों में छोटी संख्याओं की समझ बन जाए, तब ही अंकगणित की आसान क्रियाएं सिखाई जाएं। सौ तक की संख्याएं सीखने का काम धीरे–धीरे चलता रह सकता है।

ii) **बच्चों को सीखने के ऐसे मौके मिलें जिनके जरिये वे गणितीय अवधारणाओं की अपनी समझ बना सके।** जैसे कि कक्षा 1 के बच्चों को ऐसे इबारती सवाल दिए जा सकते हैं जिनका जवाब देने के लिए उन्हें जोड़, घटा और शायद गुणा, भाग का उपयोग करना पड़े। इससे बच्चों को अपनी समझ बनाने के बहुत मौके मिलते है। साथ–साथ, बच्चे जो कुछ अपने तार्किक सोंच से समझ गए हों, उसे व्यक्त जरूर करें। उन्हें सही जवाब जल्द से जल्द ढूंढने के लिए मजबूर नहीं करना चाहिए। उचित प्रश्न पूछ कर आप उन्हें धीरे–धीरे जवाब की ओर ले जा सकते हैं।

iii) **बच्चे जो कुछ पहले से जानते हैं, उसे आधार मानकर आगे बढ़ा जाए।** उदाहरण के लिए, बच्चे ठोस रूप में भिन्न संख्याएं (fractions) कुछ हद तक समझते हैं, हालांकि हो सकता है कि प्रतीकों के रूप में भिन्नों से उनका पाला न पड़ा हो। तब भिन्न सिखाने के लिए उनकी इस समझ का इस्तेमाल क्यों न किया जाए ? ठोस शैली का इस्तेमाल करने से बच्चे जो कुछ जानते हैं उसे सामने लाने में मदद मिलेगा। इसके बाद प्रतीकों से कड़ी जोड़ी जा सकती है।

iv) **किसी गणितीय अवधारणा को लिखित रूप में सीखने से पहले और सीखने के दौरान बच्चों को उसके बारे में बोलने के मौंके मिलें।** लिखित (प्रतीकात्मक) प से सम्बंध जोड़ने से पहले बच्चों को मौका मिलना चाहिए कि वे गणितीय अवधारणाओं को मौखिक व ठोस रूप में समझ सकें। इससे उनकी गणितीय समझ बेहतर होगी, और वे सूत्रों को आंख मूंद कर लागू करने से बच जाऐंगे।

इस बातों से सार यह निकलता है कि हमें योजना कुछ इस तरह बनानी होगी कि बच्चों की गणितीय सोच व कौशलों को विकसित करने में मदद कर सके। इसके लिए उन्हें सीखनें के ठोस अनुभवों की जरूरत है, न कि प्रतीकों के साथ ज़्यादा माथापच्ची करने की। इसका मतलब है कि सिर्फ पाठ्य–पुस्तक पर निर्भर रहने से काम नहीं चलेगा।

E5) क्या यह मुमकिन है कि सिर्फ पाठ्य–पुस्तक का इस्तेमाल किया जाए और फिर भी गणित शिक्षण की योजना गणित सीखने के सिद्धान्तों के अनुसार बनाई जाए? उदाहरण सहित जवाब दीजिए।

आंख मूंदकर पाठ्य–पुस्तक की लीक पर चलने से बचने का एक पक्का तरीका यह होगा कि इकाई व पाठ योजना बनाई जाए। एक इकाई का मतलब किसी एक विषय या एक अध्याय से होता है। इकाई को एक या ज्यादा पाठों में बांटा जाता है। जैसे, 'भिन्न' एक इकाई होगी और इस इकाई में एक पाठ 'आधे' की अवधारणा पर हो सकता है, इस पाठ अलग–अलग तरह की भिन्नों पर, एक पाठ भिन्नों के जोड़ पर, वगैरह। यानी, एक इकाई में एक या ज्यादा पाठ हो सकते है और एक साल में कई इकाइां पढ़ाई जाएंगी। इस तरह के विभाजन का हम शिक्षकों के लिए क्या महत्व है ? आइए देखें।

अलग–अलग स्तरों की योजना

इस भाग में हम देखेंगे कि एक पाठ की योजना और एक इकाई या एक सत्र () या एक साल की योजना बनाने में क्या फर्क होता है। योजना बनाने को लेकर यहां हम अपना नज़रिया पेश करेंगे। आप इससे सहमत या असहमत होने के लिए स्वतंत्र है। आइए सबसे पहले साल भर की योजना से शुरू करें।

साल की योजना

स्कूली वर्ष की शुरूआत में आपको यह सोचना होगा कि पूरे साल के दौरान आप बच्चों को कितना गणितीय ज्ञन हासिल करवाना चाहते हैं। इसके लिए आपको अपने यहां के बच्चों की पृष्ठभूमि, दिए, गए, पाठ्यक्रम के उपेक्षित लक्ष्य और एन. सी. ई. आर. टी. के न्यूनतम अधिगम स्तर नामक दस्तावेज को ध्यान में रखना पड़ेगा।

पहले तो आप तय कर लीजिए कि साल के आख़िर तक बच्चों को कितना सीख लेना चाहिए। फिर, आपको गणितीय अवधारणाओं को सिखाने के हिसाब से क्रमबद्ध करना होगा। चूंकि स्कूल आम तौर पर एक साल की तीन सत्रों में बांटते हैं, इसलिए योजना का अगला स्तर यह होगा कि तीनों सत्रों में पढ़ाए जाने वाली विषयवस्तु के लिए जरूरी समय तय कर लिया जाए। इससे आपको उन सारी गणितीय अवधारणाओं को शामिल करने में मदद मिलेगी जिन्हें आप समझते हैं कि, बच्चों की पृष्ठभूमि को ध्यान में रखते हुए, शामिल

की जानी चाहिए।

यानी, साल के शुरू में हमें अपने आप से पूछना होगा कि :

i) ज़्यादातर बच्चे पहले से क्या–क्या जानते हैं ?

ii) साल के अंत तक मैं उनसे क्या हासिल करने की उम्मीद रखूं ?

iii) जो अवधारणाएं उन्होंने सीखनी हैं उनका क्रम कैसे बनाऊ ?

iv) पाठ्यवस्तु को पूरे साल में कैसे बाँटूं ?

आप एक आम शिक्षक से इन सवालों के किस तरह के जवाब की उम्मीद करते है?

E6) मान लीजिए आप कक्षा 3 को पढ़ाने जा रहे हैं। तो आप इन सवालों का जवाब कैसे देंगे ?

एक बार मोटे तौर पर जरूरी समय तय कर लिया जाए, फिर आपको सोचना होगा कि अलग–अलग गणितीय इकाइयों को पढ़ाने में कितना में वक्त लगेगा।

इकाई की योजना

गणित की किसी नई इकाई को पढ़ाने की योजना बनाने के लिए सबसे पहले आपको गणितीय अवधारणाएं, प्रतीक, सिद्धान्त, प्रक्रियाएं आदि पता होने चाहिए इन सबको विद्यार्थियों तक पहुंचाने का सबसे अच्छा तरीका क्या होगा ? इस सवाल का जवाब देने के लिए आपको हर इकाई का गहराई से विश्लेषण करके यह पता लगाना होगा कि उसके हर हिस्से के सिखाने के लक्ष्य क्या हैं। आपको यह भी पता लगाना होगा कि आपकी कक्षा के बच्चे सम्बंधित कौन सी अवधारणाएं या कौशल पहले से जानते हैं।

एक बार यह सब पता लगा लिया, तो आगे क्या ? फिर गणित सीखने के सिद्धान्तों के अनुसार उन अवधारणाओं और कौशलों को क्रमबद्ध करना होगा, जिन्हें बच्चे सीखने वाले हैं। इसके बाद आपको यह सोचना होगा कि हर अवधारणा या कौशल को सीखने के लिए बच्चों की किन अनुभवों, सामग्रियों और गतिविधियों की जरूरत होगी।

इस तरह के गहरे विश्लेषण से आपको अपनी इकाई सिखाने की ऐसी योजना बनाने में मदद मिलेगा जिसमें नीचे दी गई बातों का ध्यान रखा गया हो :

i) बच्चों की क्षमता व समझ,

ii) नई गणितीय अवधारणाएं या कौशल समझने के लिए पहले से जरूरी जानकारी,

iii) जिन गणितीय अवधारणाएं को सीखा जाना है, उनकी प्रकृति, और

iv) स्पष्ट लक्ष्य जिन्हें हासिल किया जाना है।

योजना बनाते वक्त यह बहुत जरूरी है कि आप तय कर लें कि इकाई के किस हिस्से करो कितना समय देना है। जैसे कि, समय के मापन संबंधी इकाई की योजना बनाते वक्त आप इच्छित लक्ष्यों की रूपरेखा बनाएंगे, यह तय करेंगे कि कौन – कौन सी बातें पढ़ाई जानी हैं (जैसे, समय का कोई क्षण, समय का अन्तराल, मापन की इकाई, आदि) किस क्रम में इन्हें पढ़ाया जाना है और हर बात पर आप कितना समय लगाएंगे। अब आप यह देखने की स्थिति में हैं कि इस इकाई का कितना हिस्सा कितने दिन में पढ़ाया संभव है। आप एक–एक हफ्ते के लिए जरूरी समय तय कर सकते हैं।

एक उदाहरण के तौर पर देखे कि छोटे बच्चों को लम्बाई का मापन सिखाने के लिए शिक्षण योजना कैसे बनाएं। लम्बाई किसी भी चीज़ का सबसे आसानी से नज़र आने वाला गुण है। ज़्यादातर बच्चे स्कूल शुरू

करने से पहले ही लम्बाई की समझ बना लेते है, और इससे सम्बधित शब्दावली से थोड़े बहुत परिचित होते हैं। लेकिन कई बार उनकी समझ ऐसी होती है जिसे बड़े लोग गलत कहेंगे। जैसे कि, बच्चे कह सकते हैं कि बल खाई रस्सी, सीधी रखी रस्सी से छोटी है। जैसा कि पहले देख चुके हैं, ऐसी गल़तियां उन बच्चों में बहुत आम हैं जो लम्बाई के संरक्षण की बात को पकड़ न पाएं हों। जैसे–जैसे बच्चों का संज्ञान विकसित होता है और उन्हें समझ बनाने के लिए सीखने के अनुभव मिलते है, वैसे–वैसे ये गल़तियां दूर होती जाती है। तो इन सब बातों को ध्यान में रखते हुए, आइए देखें कि सीखने के अनुभवों का क्रम क्या हो।

एक क्रम निम्नानुसार हो सकता है :

1) **उस गुण को पहचानना जिसका मापन करना है :**

सबसे पहले हमें कोशिश करनी होगी कि चीज़ों की तुलना के जरिये बच्चे उस गुण (यानी लम्बाई) से परिचित हो जाएं। इसके लिए कुछ गतिविधियां की जा सकती हैः

क) देखने से, सबसे पहले यह पहचानें कि कौन सी छड़ ज्य़ादा लम्बी है।

ख) प्रत्यक्ष रूप से, दो चीज़ों की तुलना करके।

ग) अप्रत्यक्ष रूप से लम्बाई की तुलना करने के लिए किसी तीसरी चीज़ (पैमाने) का इस्तेमाल करके।

2) **दो चीज़ो की लम्बाई की तुलना के लिए इकाई का चुनाव :**

इकाइयां दो तरह की हो सकती हैं :

क) मनमानी इकाई, जैसे हाथ या पेंसिल।

ख) मानक इकाई, जैसे इंच या सेंटीमीटर।

3) **इकाइयों की संख्या पता लगाना और बताना :**

बच्चे इकाइयां की संख्या निम्नानुसार पता लगा सकते हैं :

क) हाथों की संख्या गिनकर,

ख) पैमाने का इस्तेमाल करके,

ग) इकाइयों के परस्पर सम्बंध का इस्तेमाल करके।

हर बार वे बताएं कि परिणाम क्या आया।

4) **मानक इकाइयों की जरूरत को समझना।**

अब आपने विषय के छोटे–छोटे हिस्से कर लिए हैं और शिक्षण के उद्‌देश्य भी तय कर लिए हैं। अब आपको यह तय करना है कि आप सीखने के लिए कौन से अनुभव देना चाहेंगे, उनमें कितना समय लगेगा, वगैरह। और आखिर में आपको ऐसे उपयुक्त औज़ार औश्र तकनीकें तैयार करनी होगी जिनसे आप अपने सिखाने के तरीके के असर का मूल्यांकन कर सकें।

E7) छोटी संख्याओं के जोड़ की इकाई की एक मोटे तौर पर योजना बनाइए।

पाठ की योजना

हर इकाई की योजना बनाते हुए आप हर हफ्ते अपनी कक्षा के बच्चों की प्रगति की जांच कर सकते हैं। यदि जरूरी हो, तो आप उनकी जरूरतों के मुताबिक सिखाने की रफ़्तार बदल सकते है। आप योजना इस तरह भी बना सकते हैं कि कक्षा में अलग–अलग समूह अलग–अलग विषयवस्तु का अभ्यास करें। इसके लिए एक तरीका तो यह हो सकता है कि आप एक ही समय पर विभिन्न वर्कशीट का इस्तेमाल करें। एक तरीका यह भी हो सकता है कि बाक़ी बच्चों को खेलकूद के लिए भेजकर आप कुछ बच्चों पर विशेष ध्यान

दें। ऐसी गतिविधियां भी आयोजित की जा सकती हैं जिनमें सारे बच्चे भाग ले सकें, चाहे उनकी जानकारी का स्तर अलग–अलग क्यों न हो। यह सब सोचना पाठ की योजना बनाने का हिस्सा है।

पाठ की योजना बनाने में निम्नलिखित बातों को ध्यान में रखने से शायद आपको मदद मिले :

- **पाठ के उद्देश्य स्पष्ट तौर पर सामने रखे :** आप कौन सी गणितीय अवधारणा पढ़ाने की कोशिश कर रहे हैं ? इसके कौन से पहलू को आप चाहते हैं कि बच्चे सीखें ? मकसद क्या है – एक नई चीज़ से परिचित कराना, या किसी चीज़ की समझ विकसित करना, या कोई ख़ास कौशल विकसित करना, या कुछ बातें दोहराना ?
- **जिन बातों को पहले से जानना जरूरी है उन्हें पता करें :** पाठ में आप जो कुछ पढ़ाने जा रहे हैं, उसके पहले क्या–क्या सीख लेना जरूरी है ? क्या बच्चे यह सब सीख चुके हैं ?
- **क्रम तय करें :** पहले, दूसरे आदि क्रम पर तार्किक रूप से कौन सी गणितीय अवधारणा आती है ? क्या बच्चों के मनोवैज्ञानिक स्तर को देखते हुए इस तार्किक क्रम में कोई फेरबदल जरूरी है?
- **कार्य पद्धति तय करें :** सिखाने का कौन सा तरीका सबसे ज्यादा कारगर होगा? पिछले पाठों से इस पाठ को जोड़ने के लिए क्या करना होगा? बच्चों को किस तह के ठोस अनुभवों की जरूरत होगी? कौन सी गतिविधियों से बच्चों की दिलचस्पी बनी रहेगी, और उनका ध्यान भी लगा रहेगा? गतिवधि में आपकी भूमिका क्या होगी, और इसे कैसे करवाया जाएगा? क्या इस पाठ/गतिविधि में पूरी कक्षा शामिल रहेगी या छोटे समूहों में या सामग्री का उपयोग करेंगे, और कैसे? बच्चों की निजी जरूरतों को पूरा करने के लिए सामग्री या गतिविधियों में किस तरह के फेरबदल किए जांऐगे?
- **यह तय करें कि पाठ के हर हिस्से पर कितना वक्त लगाएंगे :** क्या इतना वक्त काफी होगा? क्या किसी गतिवधि कि लिए ज्य़ादा समय देना उचित होगा ? उसका मतलब होगा कि बाद में कहीं और समय कम करना होगा।
- **मूल्यांकन का तरीका तय कें :** पाठ के दौरान सीखने – सिखाने की प्रक्रिया का मूल्यांकन करने के लिए आप क्या औज़ार इस्तेमाल करेंगे? पाठ के अंत तक बच्चों ने क्या सीखा इसका मूल्यांकन किस तकनीक से करेंगे?
- **पाठ की योजना को लिखे :** योजना को लिख लेने से आपको कई बातों को स्पष्ट करने का मौका मिलेगा, और यह एक रिकॉर्ड भी रहेगा। इसका इस्तेमाल आप बच्चों के और खुद अपने काम के मूल्यांकन के लिए कर सकते हैं। और आगे के पाठों की योजना बनाते समय भी यह काम आएगा।

E8) पाठ की योजना बनाते वक्त आप और किन चीज़ों का ध्यान रखेंगे?

यह जरूरी नहीं है कि पाठ की योजना बनाते वक्त आप सारे बिन्दुओं पर विचार करें। मान लीजिए कि आपने बच्चों को लम्बाई की उचित मानक इकाई के चुनाव की जरूरत समझाने के उद्देश्य से एक घण्टे का एक पाठ रखना तय किया है। एक योजना निम्नानुसार हो सकती हैं :

i) उन्हें हाथ से या रस्सी के टुकड़े से चीज़ों की लम्बाई या लोगों का कद नापने की गतिविधि करवाएं। (15 मिनट)

ii) परिणामों की तुलना करने में उन्हें मदद दें। (10 मिनट)

iii) कई बच्चों से किसी चीज़ की लम्बाई फुट्टे से नपवाएं (यह मानकर कि वे भागों को पढ़ना जानते हैं) और परिणाम रिकॉर्ड करवाएं। (10 मिनट)

iv) उनकी मानकीकरण के लाभ समझने में मदद करें। (10 मिनट)

v) पाठ के दौरान गतिविधियों/परस्पर क्रियाओं का मूल्यांकन करें। (10 मिनट)

बेशक, हमें ध्यान रखना होगा कि मापन की इकाई की आवधारणा विकसित होने में समय लगता है। एक ही गतिविधि कभी भी काफी नहीं होती। शिक्षक को अवधारणाओं के प्रति सजग रहना होगा और अन्य गुणों के बारे में भी इसी तरह की गतिविधियों को बनाना होगा। कक्षा कार्य के दौरान हो सकता है आपको लगे कि शुरू की गतिविधियों के लिए 15 मिनट काफी नहीं हैं, और ज्यादा समय की जरूरत है। तब आपको लचीला रवैया अपनाना पड़ेगा, और भविष्य में पाठ योजना बनाते समय इस बात का ध्यान रखना होगा।

E9) भिन्न संख्याओं का जोड़ सिखाने के लिए ऊपर सुझाए मार्गदर्शक सिद्धान्तों के अनुसार एक विस्तृत पाठ योजना लिखिए।

सीखने–सिखाने की प्रक्रिया का मूल्यांकन

एक दिन मैं पास के एक स्कूल में कक्षा 2 के बच्चों से मिलने गई थी। मैंने देखा कि उनमें से कई बच्चे 'आधे' की अवधारणा को ठीक से समझ नहीं पाए थे। शिक्षक स बात करने पर पता चला कि उन्होंने संबंधित गतिविधियों के जरिये यह अवधारणा बच्चों को सिखाई थी। फिर भी बच्चे अवधारणा को समझ नहीं पाए थे। शिक्षक को यह बात तभी पता चली जब मैंने उन्हें बताया। ऐसा क्यों हुआ? क्या सिर्फ गतिविधियां दे देने से सुनिश्चित हो जाता है कि बच्चे र कैसे कह सकते हैं कि आप जो कुछ सिखाना चाहते थे, वह बच्चों इन्हीं सवालों पर ग़ौर करेंगे।

चित्र 2 : शिक्षक ''तो बच्चों तुमने सीखा कि ...'' बच्चे (चकराकर) : ''क्या सचमुच?''

अपने अनुभव से, आप जानते हैं कि यह हमेशा सम्भव नहीं होता कि हमारी योजना के अनुसार सीखने का माहौल बन जाए। कई बार यह ऐसे कारणों से होता है, जो आपके बस में नहीं हैं। हर मर्तबा जब कोई पाठ योजना के मुताबिक नहीं चलता, तो हमको इसके कारणों की छानबीन करनी चाहिए। क्या यह शिक्षण साधनों की कमी की वजह से हुआ? या गतिविधियों की गलत डिज़ाइन की वजह से हुआ? या कक्षा कं संयोजन व प्रबंध की दिक्कतों की वजह से हुआ? या और कोई कारण था?

कई मर्तबा गतिविधियों का अपेक्षित असर नहीं होता क्योंकि समय कम पड़ जाता है और शिक्षक को सिलेबस आगे बढ़ाने की हडबड़ी होती हैं लेकिल कारगर शिक्षण के लिए जरूरी है कि बच्चों को सही ढ़ंग से चुनी हुई गतिविधियां दी जाएं, और इन्हें करने के लिए तथा इनसे सीखने के लिए काफी समय दिया जाए। यदि कोई गतिविधि अच्छे से चल रही है और बच्चे उसमें जुटे हुए हैं, तो इसे योजना के हिसाब से ज्यादा वक्त भी दिया जा सकता है। यह भी हो सकता है कि गतिविधि कुछ ऐसी हो कि उसे पूरी कक्षा के साथ नहीं

किया जा सकता। यहीं पर योजना में लचीलेपन का फायदा होता है। यदि एक योजना नहीं चल रही है, तो दसूरी आज़माई जा सकती है!

किसी भी सिखाने के तरीके का एक जरूरी हिस्सा होता है उसके असर का मूल्यांकन। सीखने–सिखाने की प्रक्रिया कारगर है या नहीं, इसका फैसला करने के लिए आप खुद से कुछ इस तरह के सवाल पूछ सकते हैं:

- क्या बच्चों को पाठ में मज़ा आ रहा है?
- क्या वे सवाल कर रहे है और गतिविधियों में पहल कर रहे हैं?
- क्या आपके द्वारा पूछ गए सवालों का जवाब देने के लिए उन्हें काफी समय मिल रहा है?
- क्या उन्हें, वे जो कुछ कर रहे हैं, उसके बारे में सोचने के लिए बढ़ावा मिल रहा है?

E10) अपने सिखाने के तरीके का मूल्यांकन करने के लिए आपको कई और अहम सवालों को पूछने की जरूरत है। क्या आप इन सवालों की सूची बना सकते हैं?

हमें यह नहीं भूलना चाहिए कि अगर शिक्षक विद्यार्थियों को ध्यान में रखकर सिखाएं तो सीखने–सिखाने की प्रक्रिया पर उसका बहुत अच्छा असर होता है। इसलिए हमें बारम्बार खुद से पूछते रहना चाहिए किः

- क्या बच्चों को समझाने की कोशिश में मैं, एक शिक्षक के नाते, अपनी भाषा में बदलाव लाती/लाता हूं?
- क्या मैं उन्हें सवाल बनाने देती/देता हूं?
- क्या मैं उन्हें इस बात का मौका और समय देती/देता हूं कि, जो कुछ मैंने उन्हें पढ़ाया है, वे उसके बारे में सोच सकें और बात करें?

E11) अपने सिखाने के तरीके के सही मूल्यांकन के लिए और कौन से शिक्षक केंद्रित सवाल पूछे जाने चाहिए?

बच्चों की समझ को जांचना और उसका मूल्यांकन करना शिक्षण का अभिन्न अंग होना चाहिए। शिक्षकों को यह पक्का कर लेना चाहिए कि क्या वास्तव में उन्होंने यह सब कुछ पढ़ा दिया है, जो वे सोचते हैं कि उन्होने पढ़ाया है। और यह भी तय कर लेना चाहिए कि क्या हर बच्चे ने वह सब सीख लिया है जिसकी उससे उम्मीद थी। जैसे, हो सकता है कि मूल्यांकन के ज़रिये शिक्षक को पता चले कि करीब एक–चौथाई बच्चे 'आधे' की अवधारणा पकड़ नहीं पाए हैं। तब उन्हें एक बार फिर उन बातों से शुरू करना होगा, जिनसे बच्चे पहले से परिचित हों। इस बार शिक्षक नए तरीके आज़माने का फैसाला कर सकती है, जैसे कि अलग–अलग बच्चों को उनकी ख़ास जरूरतों के मुताबिक अगल–अलग वर्कशीट दी जा सकती है, या मित्रों से सीखने का तरीका अपनाया जा सकता है। शिक्षक को इस बात का एहसास भी होना चाहिए कि कब किसी बच्चे को ठोस चीज़ों के इस्तेमाल की जरूरत है, और जरूरत के मुताबिक उस बच्चे को इसका मौका देना होगा।

यानी, बच्चों का मूल्यांकन जरूरी है, लेकिन यह उपयोगी तभी होता है जब आप इसका असर अपनी शिक्षण प्रक्रिया पर पड़ने दें। सिफ 'अच्छा', या 'औसत' कहलाने के मकसद से किया गया मूल्यांकन ज्य़ादा उपयोगी नहीं होता। मूल्यांकन के जरिये यह समझने की कोशिश करनी चाहिए कि किस हद तक हर बच्ची अपनी गणितीय क्षमताएं विकसित कर पाई है। इसलिए मूल्यांकन के दायरे में अलग–अलग तरह के गणितीय कार्य शामिल किए जाने चाहिए। मूल्यांकन में बच्चों को ऐसी समस्याओं से निपटने का मौका मिलना चाहिए जिनमें उन्हें कई गणितीय बातों का इस्तेमाल करना पड़े। उनकी योग्यता जानने के लिए आप ऐसी तकनीक अपना सकते हैं जिनसे कई क्षमताओं की जांच साथ–साथ हो सकती है इनमें बच्चों के लिए बहुत बोझिल कार्य न हो। लिखित व मौखिक कार्य भी शामिल हो सकते हैं।

यानी, मूल्यांकन प्रक्रिया से आपको यह देखने में मदद मिलनी चाहिए कि क्या शिक्षण के से निर्धारित लक्ष्य हासिल हो गए हैं। दरअसल हर कदम पर मूल्यांकन आपकी सीखने–सिखाने की प्रक्रिया का हिस्सा होना चाहिए। इस प्रक्रिया के दौरान मूल्यांकन के लिए बच्चों से उनकी प्रतिक्रियाएं बार–बार लेते रहना चाहिए। इस तरह के मूल्यांकन से आपको यह पता लगता रहेगा कि बच्चे की समझ में कोई गलती तो नहीं है, या उसे किसी तरह की मुश्किल तो नहीं आ रही है। और यह बात आपको उसी समय पता लग जाएगी जब यह ग़लती या दिक्कत सामने आएगी, और समय रहते उसका सुधार कर सकेंगे। इससे काफी समय और मेहनत की बचत होगी। ख़ासकर गणित जैसे विषय में ऐसे उपाय जरूरी होते हैं क्योंकि इनमें अवधारणाएं एक निश्चित क्रम में विकसित होती हैं।

सिखाने के दौरान मूल्यांकन के अलावा आपको समय–समय पर परीक्षा भी करनी होगी। इससे आपके विद्यार्थियों को तो शिक्षण के उद्देश्य हासिल करने में मदद मिलेगी ही, साथ में आप भी अपने शिक्षण का मूल्यांकन कर पाएंगे, हर बच्चे की समस्या को पहचान पाएंगे और उन्हें सुलझाने में बच्चों की मदद कर पाएंगे।

ऊपर दी गई चर्चा के बाद आप इस बात से जरूर सहमत होंगे कि बच्चों का मूल्यांकन सिर्फ सत्र या साल के आखिर में करने की बजाय पूरे साल भर करना जरूरी है। सत्र के अंत में किए गए मूल्यांकन से न तो बच्चों को मदद मिलती है और न ही शिक्षक को।

और अब एक अभ्यास!

E12) एक आठ साल की बच्ची को आप समय का मापन सिखा रहें हों, तो सिखाने के दौरान उसका मूल्यांकन कब–कब करेंगे?

इसके साथ ही हम शिक्षण के व्यावहारिक पहलुओं की चर्चा समाप्त करेंगे। आइए इस इकाई में की गई बातों को सार रूप में दोहरा लें।

सारांश

इस इकाई में हमने पाठ्यक्रम से गुज़रते हुए उसकी पूरी प्रक्रिया पर बात की है। मोटे तौर पर हमने सीखने–सिखाने की प्रक्रिया को तीन चरणों में बांटा है। शुरूआत योजना बनाने से होती है जिसमें विषयवस्तु का विश्लेषण भी शामिल होता है। पहले चरण में उद्देयों को पहचानना, शिक्षण अनुभवों की रचना और उन्हें क्रमबद्ध करना और पाठ योजना तैयार करना शामिल हैं।

दूसरा चरण पाठ्यक्रम को लागू करने के बारे में है। इसमें विद्यार्थियों को योजना चरण में तय किए उद्देश्य हासिल करने में मदद देने के लिए गतिविधियां तैयार करना और उनका इस्तेमाल करना शामिल है। इसके लिए सिखाने के एक या एक से ज़्यादा तरीके अपनाए जा सकते हैं।

आख़री चरण में सीखने–सिखाने की प्रक्रिया का मूल्यांकन किया जाता है। इसके तहत यह मूल्यांकन किया जाता है कि बच्चे किस हद तक अपेक्षित लक्ष्य हासिल कर पाए हैं और उन्हें क्या दिक्कतें आई हैं। मूल्यांकन के दौरान पाठ्यक्रम को पूरा करने की प्रक्रिया की कारगरता की भी जांच की जाती है और उन खामियों को पहचाना जाता है, जिन्हें दूर करना जरूरी है। इससे आपको ज़्यादा उचित तरीकों को अपनाने में मदद मिलेगी।

और अब आप भाग 4.1 पर लौटिए, और वहां लिखित उद्देश्यों पर नज़र डालिए। देखिए कि क्या आपने वे सारे उद्देश्य हासिल कर लिए हैं। यह तय करने का एक तरीका यहर है कि आप सारे अभ्यास जरूर करें। नीचे इन अभ्यासों के बारे में हमारी टिप्पणियां दी गई हैं। शायद इनमें आपकी दिलचस्पी हों।

पाठ–1

E1) उदाहरण के लिए ताश खेलते समय, मुझे उन्हें छांटना पड़ता है, उन्हें क्रम में लगाना पड़ता है, जो पिछला पत्ता गिराया गया है, उससे बड़ी संख्या को जानना पड़ता है, वगैरह–वगैरह।

E2) उदाहरण के लिए, अनुपात और समानुपात, अनुमान लगाना, गिनती करना, आदि। ये क्षमताएं किस प्रकार इस्तेमाल की जाती हैं ?

E3) i) लम्बाई नापने में।

ii) भार नापने और डाल की मजबूती और तनाव का अंदाजा लगाने में।

iii) लंबाइयों को नापने और उनकी तुलना करने में।

iv) मोटाई को मजबूती से और उस भार से जो वह उठा सकती है, संबद्ध करने में।

v) जैसे (v) में, और झूले पर वजन और उसकी चाल का ज्यामिति से संबंध स्थापित करने में।

E4) उदाहरण के लिए, हरि को दूरी, जाने की गति इत्यादि, का अंदाजा लगाना है, और सड़क की हालत को गति से संबद्ध करना है। आप बहुत से और उदाहरण सोच सकते है।

E5) कुछ उदाहरण

हम अपने चारों और बहुत सी सममिती देखते हैं, और हम पैटर्नों को देखते व पहचानते हैं। पुष्प सज्जा, लोक चित्रकला, और कपड़ों की डिज़ाइन, इत्यादि, सब में सममिति और पैटर्नों का उपयोग होता है। पौधों में सममिति, आकार और पैटर्नों, इत्यादि, के असंख्य उदाहरण हैं। ऐसे उदाहरण जानवरों, वस्तुओं, तस्वीरों और अन्य चीज़ों में पाए जाते हैं। लेकिन इस सब को हम गणित से संबंधित नहीं मानते हैं। इसलिए जब हम गणित की कक्षा में इन अवधारणाओं को पढ़ते हैं, तो ये हमारे जीवन के अनुभवों से बिल्कुल हटकर होते है।

हम दैनिक बातचीत में प्रायिकता की संकल्पना का उपयोग भी कई बार करते हैं। उदाहरण के लिए,

- इंदौर–बिलासपुर गाड़ी कई बार देर से आती है। वह आज भी देर से आएगी।
- आज बारिश होने की कोई संभावना नहीं है।
- वह जरुर आएगा। वह अपनी बात का पक्का है।

E6) एक उदाहरण के लिए आप हमारा ऑडियो–कार्यक्रम "मज़े मज़े से गणित सीखना" सुन सकते है।

पाठ–2

E1) उदाहरण के लिए, जब कोई बच्चा आपके साथ टहलने जाता है और पूछता है, ''क्या फूलों के भी मम्मी पापा होते हैं?''

E2) जैसे 6 साल के बच्चे के लिए 20 साल से ज्यादा किसी की उम्र हो ही नहीं सकती। समय की अवधारणा से संबंधित कई उदाहरण मिल सकते हैं।

E3) जब कोई बच्ची बिल्ली की तस्वीर को नीला रंग देती है, और बड़ा उसे देखकर ज़ोर देता है कि बिल्ली नीली हो ही नहीं सकती।

E4) (क) जब कोई बच्ची दस (या बीस) तक गिनती बोलती है तो शिक्षक मान लेते हैं कि वह हर संख्या का मतलब समझती है। जबकि हकीकत में हो सकता है कि बच्ची 6 चीजों की गिनती भी नहीं कर पाए।

(ख) एक तो बच्चे को बढ़ावा दें कि जो अवधारणा या प्रक्रिया आप सिखा रहे हैं उसके बारे में अपनी समझ को वह बताए। इस तरह आपको उसके नज़रिए से चीज़ों को देखने में मदद मिलेगी।

बच्चों से बातचीत के दौरान आप जिन और बातों का ध्यान रखना चाहेंगे, उन्हें आप लिख सकते हैं।

E5) उदाहरण के लिए, दो अंकों वाली दो संख्याओं को गुणा करने का ऐल्गोरिद्म लें, जो कक्षा 3 के बच्चों को सिखाया जाता है। मान लीजिए कि इसे इस्तेमाल करके बच्ची 35 को 42 से गुणा करती है। वह दूसरी पंक्ति के दायें कोने में $\times$ का निशान लगाती है, बिना यह जाने कि वह ऐसा क्यों कर रही है। उसे यह नहीं पता होता कि वह वास्तव में 42 को $2 + 40$ के रूप में लिख रही है और 35 को पहले 2 से और फिर 40 से गुणा कर रही है। 40 से गुणा करने का मतलब है कि दी हुई संख्या को सिर्फ 4 से गुणा करके, प्राप्त परिणाम के अंकों को बाईं ओर एक–एक स्थान खिसकाना और हम ऐसे एक स्थान क्यों खिसका देते हैं? इसके जवाब के लिए स्थान और स्थानीय मान की सही समझ की जरूरत है।

E6) (क) ✓

(ख) $\times$

(ग) $\times$

(घ) $\times$

E7) जैसा कि अभ्यास में कहा गया है, पिछले पैराग्राफ में एक उदाहरण दिया गया है।

E8) मैंने जब यह हल किया तो मैंने पहले तो एक दूसरी संख्या पद्धति में संख्याओं को लिखा। उदाहरण के लिए, 4 को तो 4 ही लिखा, लेकिन 5 को 10 लिखा। स्थनीय मान अब इकाई, पंचाई, वगैरह हो गए हैं। आगे सवाल को हल करने में हर चरण में आपको जो समस्याएं होती हैं, उन्हें लिखें। आप इनसे कैसे निपटें? (स्थानीय मान के विवरण के लिए इकाई 6 देखें।)

E9) उदाहरण के लिए, जब मैंने कुछ 8 साल के बच्चों को 12 से 8 की गुणा करने को कहा तो पाया कि उनमें से एक 12 को 8 बार जोड़ रही थी, दूसरा 12 ×10–12–12 कर रहा था आदि।

E10) (क) फिर से समूह बनाना और जोड़ना

(ख) आगे गिनना

(ग) क्रमविनिमयता का प्रयोग और आगे गिनना

(घ) सभी गिनना

E11) जब पहली कक्षा के बच्चे को बताया गया कि '3–1' का मतलब है '3 से 1 निकालें, और यह सवाल करने को दिया गया तो उसने 1 मिटा दिया और 3 रहने दिया। यह पूछे जाने पर कि उसने ऐसा क्यों किया, उसने कहा, "आपने मुझे कहा कि एक निकालो, सो मैंने उसे मिटा दिया।" आप ऐसे कई उदाहरण सोच सकते हैं।

E12) कक्षा 2 के बच्चे को मैं कई ठोस उदाहरणों से और कक्षा 4 के बच्चे को चित्रों और प्रतीकों से समझाने की कोशिश करूंगी। हां, उनकी समझ के स्तर को मैं ज़रूर ध्यान में रखूंगी। मैं बच्चों से बात करूंगी और उन्हें अपने अनुभवों के बारे में बात करने को प्रोत्साहित करूंगी। इस तरह यह जाना जा सकता है कि वे $\frac{1}{2}$ या $\frac{1}{4}$ को कितनी अच्छी तरह समझे।

E14) एक ही लंबाई को दो डोरियां लें। 5 साल की बच्ची के सामने एक को सीधा और दूसरी को टेढ़ा–मेढ़ा करके रखें। ज्यादा संभावना यही है कि टेढ़ी–मेढ़ी करके रखी गयी डोरी को छोटा बतायेगी। आप ऐसे कई उदाहरण सोच सकते हैं।

E15) (ग) क्योंकि 3 साल के बच्चे शायद ही गिनती की अवधारणा समझ पाए हों।

E16) एक शहरी मध्यमवर्गीय माहौल में अधिक संभावना है–

(i) 4 वर्ष

(ii) 7 वर्ष

(iii) 9 वर्ष

(iv) 9–11 वर्ष

(v) सरल स्तर पर, 9 वर्षीय

E17) (क) ✓। उन्हें अभी भी अवधारणाओं और प्रक्रियाओं को समझाने के लिए ठोस अनुभव चाहिए।

(ख) ✓। इकाई 5 में इसकी विस्तार से चर्चा की गई है।

(ग) ✓। जब एक बच्ची संरक्षण कर सकती है तो वह मूर्त संक्रियात्मक अवस्था में प्रवेश के लिए तैयार है। इसलिए 6 साल के या उससे बड़े प्राइमरी स्कूल के बच्चे मूर्त संक्रियात्मक अवस्था में होते हैं।

(घ) ✓। सोच–विचार की प्रक्रिया को प्रतिवर्तित कर सकना संरक्षण की क्षमता में शामिल है, जो गणितीय सोच के लिए जरूरी है।

E18) यह कथन सही है क्योंकि बच्चे का संज्ञानात्मक विकास सिर्फ़ उसकी उम्र से ही तय नहीं होता। और बातों के साथ–साथ बच्चे के सामाजिक और आर्थिक परिवेश पर और उसके अनुभवों पर भी निर्भर करता है।

E19) यह अभ्यास करते हुए मैंने नीचे दी गई सूची तैयार की।

- जानवरों को उनके लक्षणों से पहचाना,
- जब जानवर लौटते हैं तब हरेक जानवर के लिए कए पत्थर या डंडी रखना,
- अगर वे संख्या में बहुत हों तो उन्हें पांच–पांच के समूहों में बांटकर, हर समूह के लिए एक चिन्ह रखना।
- हर जानवर के लिए एक स्थान निर्धारित करना और खाली स्थानों से खोए हुए जानवरों का अंदाजा लगाना।

पाठ–3

E1) शिक्षक बच्चों को एक, दो वगैरह से परिचित करा रहा है। वह उन्हें कोई चीज़ दिखाता है और चाहता है कि वे उसकी बात को दोहराएं। इसके तरीके से यह निष्कर्ष निकलता है कि वह मानता है कि कक्षा 1 के बच्चे इन संख्याओं को नहीं जानते। और क्या निकलता है इसमें? बच्चों के साथ अपने अनुभव और वे क्या जानते है व कैसे सीखते हैं की अपनी समझ के आधार पर क्या आपको शिक्षक की समझ सही लगती है? आप किस बात से असहमत हैं और किस बात से सहमत हैं? क्या आपको लगता है कि कक्षा 1 के बच्चों को एक, दो, तीन से परिचित कराना जरूरी है? क्या एक समूह गान के रूप में दोहराना सीखने का अच्छा तरीक़ा है?

E2) कल्पना कीजिए कि बच्चे क्या देख रहे हैं और उनसे दोहराने को कहा जा रहा है। क्या यह हो सकता हैं कि उन्हें 'एक', 'दो', वगैरह के अर्थ का बिल्कुल ही अलग संदेश मिल रहा हो ? मसलन, वे शायद सोचें कि संख्याएं उन चॉक के टुकड़ों के नाम हैं। और कौनसी गलत धारणाएं बच्चों को मिल रही होंगी ?

E3) आप किसी बच्ची को ऐसी स्थिति में देखिए जब उसके पास सामग्री हो और वह अपने आप में खोई हो। आप उसे कुछ और चीज़े देकर उसके साथ बातचीत शुरू कर सकते हैं। उससे कहिए कि वह गिनकर बताए कौन सी चीज़ ज्यादा हैं, कौन सी कम, या एक किस्म की कितनी चीज़ें हैं, या उन चीज़ों से क्या बनाया जा सकता है, वगैरह। बच्ची को इन चीज़ो के साथ जितना और जैसा चाहे खेलने दीजिए। जब आप रिकॉर्ड कर रहे हैं कि बच्ची क्या कह रही है या क्या कर रही है, उससे अपेक्षित उत्तर की उम्मीद न करें और न ही उसे किसी ख़ास उत्तर की ओर धकेलने का प्रयास करें। वह जो भी कहे उसे रिकॉर्ड करने तथा उसकी क्रियाओं व कथनों का भावार्थ समझने की कोशिश कीजिए।

E4) इन सारी घटनाओं में बच्चे नई धारणाएं बनाते हैं और उनका उपयोग नई स्थितियों का वर्णन देने में करते हैं। वे यह समझने का प्रयास कर रहे हैं कि उनके आसपास क्या हो रहा है। इस प्रक्रिया में वे मिला–जुलाकर ऐसे विचार व्यक्त करते हैं जो शायद उन्होंने पहले कभी नहीं सुने, या वे अपने व्यापकीकरण बना रहे हैं। तीनों ही स्थितियों में बच्चे अपने आसपास की चीज़ों के बारे में अपनी पसंद और अपनी समझ का प्रदर्शन कर रहे हैं। क्या आपको लगता है कि इनमें से किसी भी उदाहरण में बच्चे किसी बड़े की नकल कर रहे हैं। क्या वे ऐसी क्षमताओं का प्रदर्शन कर रहे हैं जो नकल करके सीखी जा सकती हैं? कौन सा बड़ा इन्सान बकरी को माया कहता है?

E5) बच्ची ने मां को देखा, विश्लेषण किया कि वह क्या कर रही है और (मां के मुताबिक) शायद उसी तकनीक का इस्तेमाल किया। वह केल्कुलेटर को ठीक कर पाई, जो उसकी मां नहीं कर पाई थी। वास्तव में, जब मां ने चलता हुआ केल्कुलेटर देखा तो वह अचम्भित हो गई थी। ऐसा इसलिए हुआ क्योंकि बच्ची ने सिर्फ मां की नकल नहीं की थी।

E6) अब तक दिए गए उदाहरणों तथा बच्चों के सीखने के बारे में अपने अन्य अनुभवों का विश्लेषण कीजिए। यह सोचिए कि इनमें सीखने के जो प्रमाण हैं, उनकी व्याख्या क्या नकल के आधार पर की जा सकती है। मसलन, जब कोई बच्ची कोई चीज़ और मांग रही हो और मां–बाप लगातार मना कर रहे हैं, तो बच्ची किसकी नकल कर रही है ? इस प्रक्रिया में बच्ची अपने व्यवहार से दर्शाती है कि वह सीख रही है, किन्तु नकल करके नहीं।

E7) इसका महत्व बच्चों के सीखने के बारे में आम धारणाओं में परिवर्तन के लिहाज़ से है। बच्चे नकल करने को कतई उत्सुक नहीं होते और वे जो अधिकांश बातें सीखते है वे नकल करके नहीं सीखते। परन्तु दुर्भाग्यवश

अधिकांश गणित शिक्षक बच्चों को नकल करने व रटने पर मजबूर करते हैं। क्या बोर्ड पर एक सवाल हल करके बच्चों से वैसे ही सवाल छुड़ाने को कहना सार्थक सीखना कहा जा सकता है ? इस तरह कोई चीज़ बच्चों के गले ज़बरदस्ती उतारने की बजाय, हम बच्चों को सीखने में मदद कैसे कर सकते हैं ?

E8) ऊपर के उदाहरणों पर नज़र डालिए। ये सारे उदाहरण बताते हैं कि बच्चों के दिमाग़ कई अलग–अलग तरह से विकसित होते हैं, सिर्फ़ उस तरह से नहीं जैसे बड़े चाहते हैं।

E9) मसलन, किसी शिशु को देखिए। आपने उसे आपकी उंगली पकड़ना नहीं सिखाय, किन्तु वह पकड़ लेती है।

नर्सरी स्कूल के बच्चों को देखिए। वे अपने जीवन के 3–4 वर्ष गुज़ार चुके हैं, हर दिन खोजबीन करके सीखते हुए। तो, दे खाली स्लेट कैसे हो सकते हैं?

पाठ–4

E1) i) गलत। यदि कोई बच्ची संख्याओं के नाम बोल सकती है, तो इसका यह मतलब नहीं कि वह गिनती जानती है।

ii) सही।

iii) गलत। यदि बच्ची को 'पांच' की अवधारणा समझ में आ गई है तो वह 'पांच' शब्द का इस्तेमाल दोनों अर्थों में कर सकेगी।

iv) सही।

E2) i) आप तीन अलग–अलग आकृति की पत्तियां लेकर बच्चों से कह सकते हैं कि "एक–सी दिखने वाली पत्तियों को साथ – साथ रखो।" शुरू में शायद उन्हें मदद की जरूरत पड़े। उन्हें पत्तियों की तीन अलग – अलग आकृतियां दिखाकर बताइए कि ये अलग – अलग समूह हैं। धीरे – धीरे इस तरह की मदद कम करते जाएं। तब आप निर्देशों को ऐसे शब्दों में रख सकते हैं कि "जो चीज़े एक जैसी हों, उन्हें एक समूह में रखो।" वे जो कुछ करें, उसके बारे में उन्हें बात करने को प्रेरित करें। उन्हें यह भी बताने को प्रेरित करें कि वे ऐसा क्यों कर रहे हैं।

ii) आप बच्चों को ऐसे बटन दे सकते हैं जिनमें सिर्फ रंग (या आकृति, या आकार) का अन्तर हो, और उन्हें एक से बटन साथ – साथ रखने को कहें। यदि इस तरह के सामान्य निर्देश के आधार पर गतिविधि पूरी करने में उन्हें दिक्कत हों, तो आप ख़ास निर्देश दें। "सारे बटन एक साथ रखो" वगैरह।

iii) एक डिब्बे में कई किस्म के शंख, बीज, मोती या पत्थर रखकर बच्चों से उन्हें आकृति, आकार या रंग के आधार पर छांटने को कह सकते हैं।

iv) आप बच्चों को कपड़े देकर कह सकते हैं कि उन्हें रंग या उपयोग के आधार पर छांटे।

v) जब बच्चों को ठोस चीजों का काफी अनुभव हो जाए, तब आप चित्रों के आधार पर भी वर्गीकरण की गतिविधियाँ करवा सकते हैं। जैसे एक एक सेव, केला, संतरा, प्याज, बैंगन, तथा मूली, के चित्र बनाकर बच्चों से कहिए कि एक सी चीजों में रंग भरें।

vi) आप बच्चों को ऐसी चीजें दे सकते है जिनके वजन में स्पष्ट अन्तर हो। अब उनसे कहिए कि इनमें से भारी व हल्की चीजें छांटे। उनसे इस बात पर चर्चा करें कि इन चीजों को उन्होंने किस आधार पर छांटा।

E3) i) बच्चों को अलग अलग आकार कि डिब्बे या छल्ले देकर कह सकते हैं कि उन्हें एक दूसरे में इस तरह फिट (fit) करें कि कोई चीज बाकी न रहे। या बच्चों से कह सकते है कि खेल सामग्री को इस ढंग से जमाए कि सबसे नीचे सबसे बड़ी चीजें हो, उसके बाद उनसे छोटी, तथा ऊपर सबसे छोटी चीज हो।

ii) बच्चों को अलग – अलग तरह की ऐसी चीजें जो खुरदरी हों (जैसे रेगमाल) और ऐसी जो चिकनी व सपाट हो (जैसे नायलोन) दें और कहें कि इन्हे खुरदरेपन से चिकनेपन के क्रम में जमाएं।

iii) बच्चों का तीन –चार ऐसी परिचित चीजें दे जिनके वजन में स्पष्ट अन्तर हो, जैसे, गेंद, रबर, पेंसिल, मोटी, किताब, आदि अब उनसे कहिए कि इन्हें इस तरह जमाएं कि सबसे हल्की चीज सबसे पहले हो, फिर उससे भारी और अन्त में सबसे भारी चीज हो।

E4) i) आप उसे बहुत सी टॉफियां देकर पता लगाने को कह सकते है कि क्या ये टॉफिया उतनी ही हैं जितने उसके दोस्त जो वहां उपस्थित हैं। यदि नहीं तो टॉफिया ज्यादा हैं या दोस्त ? अब आप उससे कहिए कि वह एक –एक गोली को एक एक दोस्त से जोड़े (इस तरह से उसकी एक–एक की संगति की समझ भी बढ़ेगी।)

ii) इस काम के लिए ताश का उपयोग भी कर सकते हैं।

E5) उदाहरण के लिए किसी बच्ची ने 'भाग करो' की जगह हमेशा 'बांटो' या हिस्से करो ही सीखा है। अब यदि वह पहली बार 'भाग करो' शब्द सुनेगी तो वह उस सवाल को हल नहीं कर पाएगी, हालांकि हो सकता है कि उसे भाग करना अच्छी तरह से आता हो। सारे गोल बटन जामुनी थे, इसलिए मुमकिन है कि बच्चे को लगे कि ... का कुछ संबंध 'जामुनी' से है। हो सकता है कि कोई बच्ची जामुनी बटन चुनते हुए इस गतिविधि को सही – सही पूरा कर दे, जबकि शिक्षक सोचते रहें कि उसने बटन आकृति के आधार पर चुने हैं।

E6) क) नही। एक वजह तो (ख) में दी गई है, और बाकी वजह आप लिखिए।

ग) इस गतिविधि में सारे बटन एक रंग के रखे जा सकते हैं ताकि बच्चे सिर्फ़ एक ही सामान्य गुण देखें, यानी गोलनप।

E7) शायद उसे यह समझ न आया हो कि सामान्य रूप से 'चार' का क्या अर्थ होता है। हो सकता है कि उसने शब्द याद कर लिया हो और उसे किताब में दिए गए प्रतीक व चित्र से जोड़ लिया हो। इस तरीक़े से तो उसी तरह की ग़लत धारणा को बल मिलेगा जैसा कि मरिअम्मा (उदहारण 5) को थी।

E8) क) इससे उन्हें यह समझने में मदद मिलती है कि कोई भी संख्या उस मात्रा में किन्हीं भी चीजों के समूह को दर्शाती है।

ख) इससे उन्हें पता चलता हे कि संख्याएं किसी निश्चित मात्रा को दर्शाती हैं, जैसे तीन चम्मच, तीन छलांगे, वगैरह। इसी के आधार पर वे संख्या की अमूर्त अवधारणा समझ पाएंगे, जो कि एक संज्ञा है।

ग) जल्दबाजी में संख्यांक सिखाने का असर यह होता है कि बच्चे संख्याओं को चीजों व मात्राओं से नहीं जोड़ पाते।

घ) शून्य भी अन्य संख्याओं की तरह एक संख्या है। संख्या–रेखा पर इसका निरूपण किसी भी अन्य संख्या की तरह ही होता है।

अभ्यासों पर टिप्पणियां

E1) जरूरत इस बात की है कि वह ऐसी गतिविधियों का अभ्यास करे, जैसा कि उदाहरण 2 में दी गई हैं।

E2) उदाहरण 1 में बच्चों को संख्यांक रट रटकर बग़ैर समझे, सीखने पड़े थे। उन्हें बस कुछ बने–बनाए नियम देकर उनका पालन करने को कहा गया। लिहाज़ा इस तरीके में वे सारे पहलू हैं जो 'आँख मूदंकर नियम मानने' के किसी भी तरीके में शामिल हैं। उदहारण 2 में शिक्षक बच्चों को ठोस चीजों की मदद से अवधारणा सीखने को प्रोत्साहित कर रही हैं। वे यह भी कोशिश कर रही हैं कि बच्चे अपनी रफ्तार से और मज़ेदार तरीक़े से अवधारणा समझें।

E3) क) मेरे एक दोस्त, जो बहुत संजीदा शिक्षक हैं, उसने काफी उत्साह से मुझे अपने द्वारा रचित एक खेल के बारे में बताया था। उसका कहना था कि बच्चों को छोटी–छोटी टोलियों में बांटकर, हर टोली को दो पासे दे दो। हर टोली में बच्चे बारी–बारी से खेलें। हर बच्चे को पांसों पर आने वाले अंकों की मदद से बड़ी बड़ी संख्या जुटाना है। एक पासे के अंको को इकाई और दूसरे पासे के अंको को दहाई माना जाएगा। जिसके पास सबसे बड़ी संख्या जुटेगी, उस बच्चे की जीत होगी।

हमारे साथ बैठी मेरी एक सहकर्मी इस पर काफ़ी उत्साहित हो गई, और कहने लगी कि हम इस खेल को कई तरह से आगे बढ़ा सकते हैं। शिक्षक और मैंने पूछा, "कैसे?" उसने कहा, "सबसे पहले तो पासे की जगह हम टीन या कार्डबोर्ड का एक चक्र बना सकते हैं, जिस पर 0 से 9 तक अंक लिखे हों। अब एक कार्डबोर्ड या प्लास्टिक की पट्टी को तीरनुमा काटकर एक सुई बना लो। यह सुई चक्र की त्रिज्या के बराबर लम्बी हो। अब चक्र के बीचोंबीच एक सुराख कर लें और इसमें एक तीली या कील से सुई का चपटा हिस्सा लगा दें। सुई को उंगली से जोर से मारकर घुमाया जाए। जब यह सुई रूके तो उसके सबसे पास का अंक लिख लें। हर बच्ची अपनी बारी आने पर दो मर्तबा सुई को घुमाए और दो अंक उसे मिलें उनसे बड़ी से बड़ी संख्या बनाए। (सिर्फ इकाई, दहाई के अलावा उन्हें यह भी अनुमति हो कि गुणा, जोड़ आदि जो भी संक्रियाएं वे जानते हों उनका उपयोग संख्या बनाने में करें। इस खेल को बदलकर सबसे छोटी संख्या बनाने के लिए भी कहा जा सकता है।

चित्र 9 : इकाई, दहाई और आगे

यदि पासा या चक्र न हो, तो इसी खेल को खेलने के लिए शिक्षक हर टोली को पाँच जोड़ी संख्याएँ दे सकती हैं। हर जोड़ी से विद्यार्थी बड़ी से बड़ी संख्या बनाएं। या 2 जोड़ियाँ से अधिकतम योग, या न्यूनतम अंतर या अधिकतम अंतर प्राप्त करें।

(ख) मेरी गतिविधि से अपनी गतिविधि की तुलना इस्तेमाल की गई सामग्री के प्रकार, निर्देशों की जटिलता, वास्तविक अभ्यास, मजे का स्तर, हर बच्चे के सोचने व उनसे मिलने वाले नतीजों के संदर्भ में करें।

E4) सामूहिक गतिविधि के लिए बच्चों को एक समूह माना जा सकता है या उन्हें 5–5, 10–10 के समूहों में बांटा जा सकता है। ध्यान देने की बात यह है कि सामूहिक गतिविधि का मतलब ऐसी गतिविधि से है जिसे बच्चे मिलकर करें। इसका अर्थ ऐसी गतिविधि से नहीं है जो पूरी कक्षा को एक साथ दी जाए मगर हर बच्ची को उसकी अपनी कॉपी में अकेले या अपने ढंग से करना पड़े।

आप ब्लैकबोर्ड पर किए जा सकने वाले खेल सोच सकते हैं जिनमें पूरी कक्षा शरीक हो सके। या पूरी कक्षा को 5–5 की टोलियों में बांटा जा सकता है। कुछ टोलियां कार्ड से, कुछ कंकड़ों से और कुछ मोती आदि से गतिविधि करें।

E6) एक कारण तो यह है कि उन्हें 'हासिल' का अर्थ समझाए बग़ैर कॉलमनुमा तरीके से जोड़ करना सिखाया गया है। दूसरी बात यह है कि एक ही तरीक़े व एक ही तर्क को बारम्बार दोहराने से बच्चे को कुछ ख़ास मदद नहीं मिलती। दूसरे तरीके खोजने होंगे। शायद ठोस चीज़ों के साथ गतिविधियों से मदद मिलें।

आप कई और कारण सोच सकते हैं।

E7) शायद दो पासे वाले खेल में ज्यादा धैर्य और ज्यादा तार्किक क्षमता की जरूरत हो।

सैकड़ा, दहाई, इकाई को समझने की प्रक्रिया में शामिल कई उप–प्रक्रियाएं होती हैं। उनके अन्तर्गत यह भी समझना होता है कि समूहीकरण कैसे करें, बड़ी संख्याओं को सीखने में समूहीकरण से कैसे मदद मिलती है, संख्याओं का अमूर्त व औपचारिक निरूपण, आदि की समझ जरूरी है। माचिस की तीलियों वाली गतिविधि से इनमें से कौन से पहलू बेहतर ढंग से सीख सकते हैं? और पासे के खेल से कौन से?

E8) किसी बच्चे या बच्चों के साथ की जाने वाली गतिविधि को चुनते समय कई बातों का ध्यान रखना होता हैं–

i) गतिविधि बच्चों की संख्या के लिहाज़ से उपयुक्त हो।

ii) बच्चे इसे बिना अधिक मेहनत के व खूब मजे से कर सकें।

iii) यदि एक से अधिक टोलियां गतिविधि करें, तो इतना लचीलापन होना चाहिए कि इसे विभिन्न क्षमताओं के अनुरूप ढाला जा सके।

iv) जो अवधारणा सिखाई जा रही है, बच्चे वाकई उसका अहसास कर पाएं।

v) गतिविधि ऐसी हो कि बच्चे सीखने की प्रक्रिया में पूरी लगन से जुड़े रहें।

इस सूची में आप और बातें जोड़ सकते हैं।

E9) मसलन, ऐसे कार्डो का ढेर लीजिए जिनपर कोई न कोई एक अंक लिखा हो। हर टोली इसमें से कोई 3 कार्ड खींचे। अब टोली का हर सदस्य इन अंको के आधार पर तीन अंकों की सबसे बड़ी व सबसे छोटी संख्या बनाने की कोशिश करे।

E10) द्वि–आधारी प्रणाली में 5 को 101 लिखा जाएगा (यानी $1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 1$) पंच–आधारी प्रणाली में 5 को 10 लिखा जाएगा (यानी $1 \times 5^1 + 0 \times 5^0$) आप बाकी की संख्याओं को इसी प्रकार से लिखिए।

पाठ–5

E2) ऐसा करना इसलिए जरूरी है ताकि बच्चे, रंग, आकार, आकृति जैसे गुणात्मक अंतरों में न उलझें। मसलन, एक छोटी बच्ची से आप शुरू में यह उम्मीद नहीं कर सकते है कि वह दो संतरों और तीन केलों को जोड़कर पांच फल कहे। वह उन्हें देखेगी और कह देगी कि दो संतरे और तीन केले हैं।

E3) इन दोनों के बीच अंतर कर पाना हमेशा आसान नहीं होता। खास बात यह है कि एकत्रीकरण में दो या दो से ज्यादा चीजों को आपस में मिलाया जाता हे जबकि वृद्धि में किसी चीज को एक निश्चित मात्रा से बढ़ाया जाता है। दूसरी किस्म से बच्चों को वास्ता ज्यादातर पैसे या मापन के संदर्भ में होता है।

दूसरी किस्म में पहले के बनिस्पत से ज्यादा समझ की जरूरत है। इसलिए बेहतर होगा कि बच्चे पहली किस्म से वाकिफ होने के बाद, शायद कक्षा 2 में आकर ही इससे सामना करें।

E4) बच्चों का सम्पर्क दोनों किस्मे के इबारती सवालों से चीजों, पैसे, मापन, समय, आदि के संदर्भ में कराना जरूरी है। शुरू में सवाल जानी–पहचानी चीजों से जुड़े हों, जिन्हें बच्चे टटोल सकें। इससे उन्हें सवाल हल करने में आसानी होगी। थोड़े ऊँचे स्तर पर उनसे विभिन्न चीजों की खरीदारी की कुल कीमत पता करने को कहा जा सकता है। (पहली किस्म)। इसी प्रकार से आप जरा बड़े बच्चों से (कक्षा 3 या 4 में) पूछ सकते हैं कि इस वक्त उनकी उम्र कितनी है और 15 वर्ष बाद कितनी होगी (दूसरी किस्म)।

जहां तक मापन का संबंध है, जब तक वे विभिन्न इकाइयों व उप–इकाइयों के बारे में सीख नहीं जाते, तब तक यह जरूरी होगा कि सभी राशियाँ एक ही इकाई में हों।

E5) अंतर शब्दों में है। 'तुलना' किस्म का जो उदाहरण हमने दिया है वह प्रतीकों के रूप में यों लिखा जा सकता है। : 15 − 5 = ☐

पूरक जोड़ के उदाहरण को प्रतीकों के रूप में इस तरह लिखा जाएगा : ☐ + 20 = 50

E7) उदाहरण ☐ पासे और पत्थरों का खेल – जिसे ज्यादा पत्थर मिलते हैं वह जीतेगा, और जितने ज्यादा पत्थर मिलते हैं, इस आधार पर निश्चित अंकों से जीतेगा।

E9) आपने जो मुख्य दिक्कते देखी होंगी, वे निम्नलिखित प्रकार की हो सकती हैं :

I) 'हासिल' को न समझने की वजह से। मसलन, वह

$$\begin{array}{r} 62 \\ -\ 28 \\ \hline 46 \end{array} \quad \text{या} \quad \begin{array}{r} 6^{1}2 \\ -\ 28 \\ \hline 44 \end{array}$$

जैसी गलतियाँ करती है।

जिन संख्यांकों में 0 कोई अंक नहीं है, उनके साथ बच्ची हासिल के सवाल ठीक से कर लेती है। लेकिन जहाँ 0 आया, उससे गड़बड़ हो जाती है, जैसे कि

$$\begin{array}{r} 60 \\ -\ 28 \\ \hline 42 \end{array} \quad \text{या} \quad \begin{array}{r} 60 \\ -\ 28 \\ \hline 48 \end{array}$$

में!

II) 'उधार लेना' या पुनर्समूहीकरण करने के बाद भी बच्ची को पूरक जोड़ करना होगा। जैसे कि

```
  63                                          दहाई    इकाई
– 28   में पुर्नसमूही करण करके      6 5         1 3      मिलता है।
----                                      2 ╱ 8
----                                      -----------
```

अभी बच्ची को यह तो पता करना ही होगा कि 8 में कितना जोड़ने से 13 बनता है, जो पूरक जोड़ के उदाहरण है।

```
           2 0 0 0 0 3
III)  उसे  – 7 8 6 9 7        जैसे सवालों में 3 में से 7 घटाने के
           -------------
           -------------
```

लिए 1 लाख उधार लेना होगा। इससे वे चक्कर में पड़ जाती है।

E12) दोनों, लेकिन पहला ज्यादा महत्वपूर्ण है। अगर बच्ची की मानसिक प्रक्रियाएँ और कौशल ठीक तरह विकसित हों, तो वह कई तरह के सवाल ठीक से कर पाएगी। हो सकता हैं कभी–कभार गलत उत्तर आ जाए, क्योंकि उसका ध्यान कहीं और हो। लेकिन दूसरी ओर, अगर शिक्षक सिर्फ सही उत्तर को चाहे, तो हो सकता है कि बच्चे ठीक से गणित कभी न सीखें।

E13) इसके लिए उन्हें निम्नलिखित जैसे पैटर्नों को बनाने और बढ़ाने का मौका दें।

i)		ii)	
	1 + 1 = 2		1 – 1 = 0
	2 + 1 = 3		2 – 1 = 1
	⋮		⋮
	8 + 1 = 9		
	9 + 1 = 10		9 – 1 = 8
iii)	1 + 1 = 2	iv)	2 – 2 = 0
	2 + 2 = 4		3 – 2 = 1
	⋮		⋮
	9 + 9 = 18		9 – 2 = 7

E14) बच्चों को ढेर सारी माचिस की तीलियाँ देकर उनसे कहिए कि वे इनके दस–दस के बंडल बना लें। सबसे पहले तो उन्हें इस बात से अच्छी तरह से परिचित होने दीजिए कि बंडल दहाई और तीलियां इकाई को दर्शाती है। अब वे इनका उपयोग घटाने की क्रमबद्ध गतिविधियों में करें – पहले 16–5 जैसे, फिर 26–9 जैसे, और आगे चलकर 82–37 जैसे सवाल करके। 26–9 जैसे सवालों को हल करते हुए उन्हें उधार का अर्थ समझ आने लगेगा क्योंकि इसमे उन्हें 20 दर्शाने वाले दो बंडलों में से एक लेकर, उसे खोलकर पहले से मौजूद 6 तीलियों में से दस तीलियाँ जोड़नी होंगी।

	बंडल	तीलियां
	2	6
–		9
कुल		

बंडल	तीलियां
1	16
–	9
1	7

इस गतिविधि को विभिन्न तरीकों से अलग–अलग चीजों के साथ कई बार दोहराएं। इसके बाद ठोस वस्तुओं के सहारे के बगैर घटाने की संक्रिया का अभ्यास करवाएं। इस तरह के काफी अभ्यास के बाद बच्चे उधार वाले घटाने के सवाल, मन में भी आराम से करने लगेंगे।

E16) आप 'बंडल ' गतिविधि या 'मोती' गतिविधि को ढालकर उपयोग कर सकते हैं। अनगिनत सम्भावनाएं मौजूद हैं।

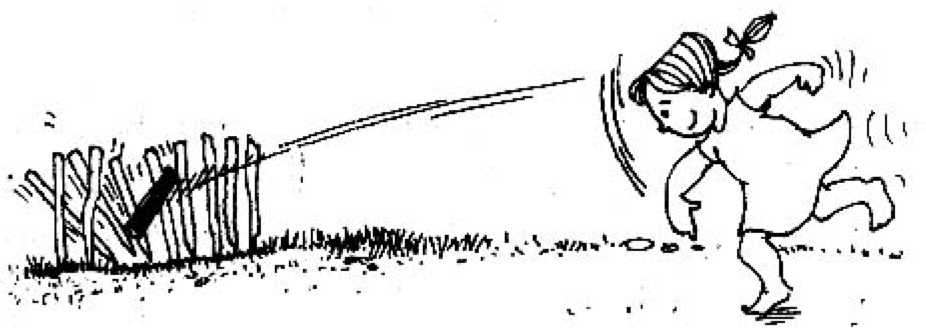
पाठ–6

E1) आप खुद ही कोई काल्पनिक कहानी रच सकते हैं। बच्चों को भी ऐसी कहानियां बनाने दें।

E2) बच्चों को टोलियों में बाँट दें। हर टोली को 1 से 50 तक संख्या वाले कार्ड अच्छी तरह फेंट कर दे दें और एक संख्या दे दें। हर टोली को यह पहचानना है कि यदि वे दी गई संख्या के अनुसार छोड़–छोड़कर गिनती करें, तो कौन–कौन से कार्ड प्राप्त होंगे। इस तरह, एक टोली मान लीजिए 5 संख्याएं छोड़कर गिनती करेगी। दूसरी टोली 7 संख्याएं छोड़–छोड़कर प्राप्त संख्याएं खोजेगी, वगैरह। यह करने के बाद सारी टोलियाँ एक–दूसरे को अपने निष्कर्ष बता सकते हैं।

E3) रेत के ढेर में एक टहनी या डंडी खड़ी कर दीजिए। इससे 10 मीटर दूर एक गोला बना लीजिए। हर बच्ची गोले में खड़ी होकर एक गेंद इस डंडी पर फेंके। यदि गेंद डंडी को लग जाए, तो उसे पांच अंक मिलेंगे। हर बच्ची को 10 मौक़े मिलेंगे। 10 मौक़े पूरे होने पर उसे बताना होगा कि उसने कितनी बार डंडी को मारा और उसे कुल कितने अंक मिले।

इस खेल को निम्नानुसार थोड़ा बदला भी जा सकता है। एक डंडी की बजाय चित्र 6 के अनुसार 10 डंडियां गाड़ दें। अब गेंद की बजाय एक डंडी का उपयोग करें। हर बच्ची को एक ही मौका मिलेगा। एक बार में गिरी प्रत्येक डंडी के लिए उसे 5 अंक मिलेंगे। हर बच्ची को पता करने दीजिए कि उसे कितने अंक मिले। बच्चों को प्रोत्साहित कीजिए कि वे अंकों की गिनती के लिए छोड़–छोड़कर गिनती करने के तरीक़े का उपयोग करें।



चित्र 6 : छोड़–छोड़ के गिनती करने के लिए गतिविधि

आप 2 से.मी. गहरा एक गड्ढा भी बना सकते हैं। हर बच्चे को इस गड्ढे से 3 मीटर दूर खड़े होकर एक कंचे को इसमें लुढ़काना होगा। यदि कंचा गड्ढे में चला जाता है, तो उस बच्चे को 5 अंक मिलेंगे। हर बच्चे को 10 मौक़े दिए जा सकते हैं।

E4) उदाहरण एक–दूसरे से तथा हमारे द्वारा दिए गए उदाहरणों से, जहाँ तक हो सके, भिन्न हों।

E5) 1981 में ब्रिटेन के 66 ग्यारह वर्षीय बच्चों पर ब्रॉउन द्वारा किए गए एक अध्ययन से पता चला कि 9 X 3 से संबंधित कहानी बनाने में 23 बच्चों ने 'दर' मॉडल व 5 ने 'पैमाना' मॉडल का उपयोग किया। शेष बच्चे इसे कर ही नहीं पाए। क्या आपके परिणाम ऐसे ही हैं ? या कुछ बच्चों ने कोई अन्य मॉडल (मसलन, आयताकार समूह) का भी उपयोग किया ? क्या 7 वर्षीय बच्चों ने सिर्फ़ 'दर' मॉडल का उपयोग किया ?

E6) बच्ची को पहाड़े किसी भी क्रम में और बीच–बीच से दोहराना आना चाहिए। उससे पहाड़े के बीच में से कोई तथ्य पूछिए। यदि वह सही उत्तर दे पाए। तो हो सकता है कि वह पहाड़े जानती है। यदि वह क्रम से हटकर गुणन–तथ्य न बता पाए तो उसे बराबर मात्रा के समूह जोड़ने तथा छोड़–छोड़कर गिनती करने के अभ्यास की ज़रूरत है।

ऐसी गतिविधियां भी सोची जा सकती हैं जिनमें बच्चों को अन्य बच्चों या शिक्षक द्वारा पूछे गए सवाल का फ़ौरन जवाब देना पड़े। लेकिन ऐसा करने से पहले उन्हें बराबर मात्रा के समूहों की अलग–अलग राशियां जोड़ने तथा विभिन्न मात्रा के समूहों को जोड़ने का काफ़ी अभ्यास करना होगा।

E7) बेशक तीसरा सबसे अहम है। उसके बग़ैर बाक़ी दो बेकार हैं।

E8) बच्चे को गुणन–तथ्यों का अभ्यास करवाने के लिए कई गतिविधियां आयोजित की जा सकती हैं। बच्चों को दो टोलियों में बांटा जा सकता है। एक टोली दूसरी टोली से इस तरह के सवाल करे : 4 गुना 3 कितना ?, 5 दूनी कितना ?, 5 तिया क्या होगा ?, वगैरह। फ़्लैश कार्ड तथा स्व–सुधार कार्डों का उपयोग भी किया जा सकता है (चित्र 7 देखें)।

5 X 3 = ?	**5 X 3 = 15**
(क)	**(ख)**

चित्र 7 : स्व–सुधार कार्डः (क) सामने से, (ख) पीछे से

E9) हो सकता है कि यह अभ्यास आपको इतना दिलचस्प लगे कि आप इससे मिलता–जुलता अपना प्रोजेक्ट बनाना चाहें।

E10) दूसरे चरण में हम 35 को 2 से गुणा कर रहे हैं या 20 से?

E11) अपने ऐल्गोरिद्म को लिख लीजिए। यह समझाइए कि क्यों इस विधि के लिए एक विशेष तरीके की ज़रूरत है। यानी क्यों बाएं से शुरू करना, दूसरी पंक्ति में X लगाना, तीसरी कतार में X X (दो कट) लगाना ज़रूरी है।

E12) एक वजह यह है कि भाग में ऐल्गोरिद्म लागू करते वक्त बच्चे को एक साथ दो स्थान के अंकों पर ध्यान देना पड़ सकता है। ऐसा उसने अन्य किसी संक्रिया में नहीं किया है। (मसलन, 225 में 5 का भाग देते वक्त उसे एक साथ बाई ओर के दो अंकों पर गौर करना होगा।)

E13) चूँकि गुणा व भाग एक–दूसरे के उलट हैं, इसलिए दोनों को साथ–साथ सीखने से दोनों को समझने में आसानी होगी। यह कतई ज़रूरी नहीं है कि भाग शुरू करने से पहले गुणा सीखकर उस पर महारत हासिल कर ली जाए।

E14) आप यह बात भाग को बारम्बार घटाने की प्रक्रिया मानकर दिखा सकते हैं। मसलन, 6÷0 का उत्तर पाने के लिए हमें देखना है कि 0 को 6 से कितनी दफ़ा घटाकर हमें 0 मिलेगा। लेकिन, कितनी भी दफ़ा घटाने पर, हमें 0 कभी नहीं मिलेंगा।

E15) इस पाठ्यक्रम में आपने अब तक जो कुछ पढ़ा है, उसके आधार पर आप कई अंदर और बाहर खुले में खेले जाने वाले खेल या ऐसे क्रियाकलाप तैयार कर सकते हैं जो उन्हें पसन्द आएं। अहम् बात यह है कि पूरी गतिविधि के दौरान आप यह अवलोकन करते रहें कि वे क्या कर रहे हैं। उनसे बातचीत कीजिए और उन्हें प्रोत्साहित कीजिए कि वे भाग की अवधारणा व प्रक्रिया की अपनी समझ को व्यक्त करते चलें। बच्चों के लिए यह ज़रूरी है कि वे पारिभाषिक शब्दों को अलग–अलग संदर्भों में बोलें और सुनें ताकि उन्हें समझ सकें, और ऐसी स्थितियाँ खुद बनाएं जहाँ वे इन शब्दों का उपयोग करें। आप कुछ ऐसे कहानियाँ भी तैयार कर सकते हैं जिनमें बच्चों को इन शब्दों की परिभाषा/वर्णन को समझने में मदद मिले। मसलन, 'किसी खेल के लिए 5–5 बच्चों की टोलियां बनानी हैं। कक्षा में 38 बच्चे हैं। कितनी टोलियां बनेगी और कितने बच्चे शेष रहेंगे जिन्हें अन्य कक्षाओं के साथ मिला लेंगे?।'

E16) 2–अंक या 3–अंक की संख्याओं में 1 अंक की संख्या का भाग सीखने के लिए एक अच्छा साधन रंगीन कार्डों से बनाया जा सकता है। ये कार्ड 100 रुपये, 10 रुपये और 1 रुपये को दर्शा सकते हैं। बच्ची को कुछ 10 रुपये वाले और कुछ 1 रुपये वाले कार्ड देकर कहा जा सकता है कि वह उन्हें कुछ निर्धारित हिस्सों में बराबर–बराबर बाँटे। निम्न प्रकार की स्थितियां सामने आ सकती है :

1) दहाई (यानी 10 रुपये वाले कार्ड) और इकाई (यानी 1 रुपये वाले कार्ड) दोनों ही निर्धारित संख्या से भाज्य हों, जैसे $86 \div 2$, $93 \div 3$, वगैरह।

2) दहाई में शेष बचे, परन्तु कुल मिलाकर कुछ शेष न रहे। इस मामले में शेष दहाइयों को इकाइयों में बदलना होगा, पहले से मौजूद इकाइयों में जोड़ना होगा और फिर बाँटना होगा, जैसे $56 \div 2$, $72 \div 3$, वगैरह। इनमें से प्रत्येक उदाहरण में पहले चरण में एक दहाई शेष रहेगी। लेकिन इकाई में जोड़कर भाग देने पर कुछ भी शेष नहीं रहेगा।

3) भाग देने पर कुछ रह जाए, जैसे $35 \div 3$, वगैरह।

बच्ची धीरे–धीरे इसी तरह सैकड़ा, दहाई व इकाई के कार्ड के साथ भाग देने लग सकती है।

पाठ–7

E1) i) एक बच्ची को ब्रेड या चपाती दीजिए और उसे उसमें से आधा लेने का कहिए। जब वह कर चुके तो उससे कहिए कि जाँच कर ले कि दोनों हिस्से बराबर हैं या नहीं।

ii) बच्चों को मिट्टी या कागज से बनी आकृतियां देकर कहा जा सकता है कि उन्हें दो बराबर भागों में बांटे। यह काम वे आकृति को काटकर, मोड़कर या चित्र बनाकर कर सकते हैं।

E2) क) दरअसल अंकित ने बड़े वर्ग के अन्दर चार वर्गों (मोटी रेखा से दर्शाए गए वर्गों) को चार अलग–अलग पूर्ण मानकर जवाब दिया। वह यह नहीं समझ पाये कि ये चार वर्ग दरअसल उसी पूर्ण यानी बड़े वर्ग के हिस्से हैं। यह समस्या अंश का सम्बन्ध पूर्ण से न देख पाने की वजह से है।

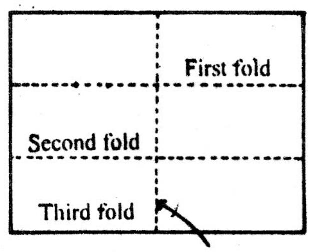
ख) जी हां। पूर्ण और उसके अंशों के संबंध वाली समस्या इस आयु के बच्चों की आम समस्या है।

ग) कागज मोड़ने या कंचे, बिस्कुट, टाफियों जैसी प्रत्यक्ष चीजों के साथ गतिविधियों के जरिये उसके संकल्प स्पष्ट किए जा सकते हैं।

E3) आप एक आयताकार कागज लेकर उसे तीन बराबर हिस्सों में मोड़ सकते हैं। मोड़ों पर कागज को दबाकर खोलिए। इस तरह $\frac{1}{3}$ दिखाया जा सकता है। इस गतिविधि को

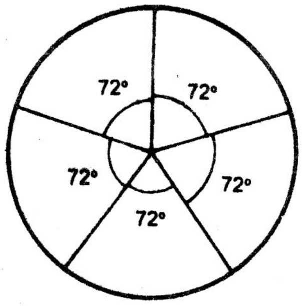
दोहराकर तथा कागज को एक बार फिर मोड़कर $\frac{1}{6}$ दिखाया जा सकता है।

(चित्र 14 देखें।)



चित्र 14

E4) एक वृत्त को पांच बराबर भागों में बांटना बच्चों के लिए प्रायः कठिन होता है। अतः आप एक वृत्त या आयत खींचकर उसे पांच बराबर भागों में बांट दें। जैसा कि चित्र 15 में दिखाया गया है। अब इनमें से एक हिस्से में रंग भर दें और बच्चों से इसे भिन्न में दर्शाने को कहें। या आप बच्चे से कह सकते हैं कि वह $\frac{1}{5}$ भाग में रंग भरे। यही बात आप कागज को मोड़कर भी दिखा सकते हैं। आप यह भी कर सकते हैं कि 10 टाफियां लेकर बच्चे से उन्हें पांच दोस्तों में बराबर–बराबर बांटने को कहें। इसके बाद बच्चे से पूछें कि हरेक को कितनी–कितनी टाफियां मिलीं।



चित्र 15

E5) कक्षा में आप सभी बच्चों के साथ कागज वाला अभ्यास कर सकते हैं। उन्हें तीन वर्गों में बांट दें। प्रत्येक वर्ग से कहें कि वह कागज को दो बराबर भागों में मोड़ ले। कागज को वापिस खोलकर आधे भाग को छायादार बनाएं। बच्चों से आप यह भी कहलवाएं कि उन्हें पूरे का आधा प्राप्त हुआ है। इसके बाद आप कागज के तीन बराबर हिस्से करने वाली गतिविधि करवा सकते हैं। यह दो हिस्से करने से कहीं ज्यादा मुश्किल है। इससके बाद आप हर वर्ग को 12 कंचे या टाफियां देकर उनसे इन्हें तीन या चार बराबर भागों में बांटने को कह सकते हैं।

E6) i) एक दर्जन केले या संतरे लें, जिनमें से तीन सड़े हों। बच्चों से सड़े केले/संतरों को छांटने का कहें। अब उनसे शेष केलों/संतरों को भिन्न के रूप में बताने का कहें।

ii) 3 चपातियां लेकर 4 बच्चों से कहिए कि आपस में बराबर–बराबर बांट लें। वे दो तरीके अपना सकते हैं।

क) तीन लड़के एक–एक चपाती ले लें और फिर प्रत्येक लड़का $\frac{1}{4}$ चपाती चौथे बच्चे को दे सकता हैं।

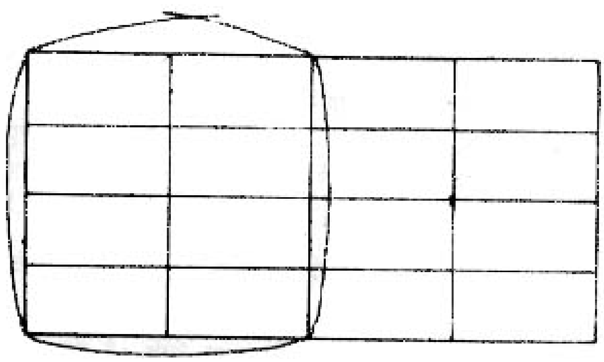
ख) वे तीनों चपातियों को चार बराबर हिस्सों में बांटकर फिर इन हिस्सों को आपस में बराबर बांट सकते हैं।

चपाती बराबर–बराबर बांट लेने के बाद उनसे यह लिखने को कहा जा सकता है कि प्रत्येक को कितना हिस्सा मिला।

पाठ–8

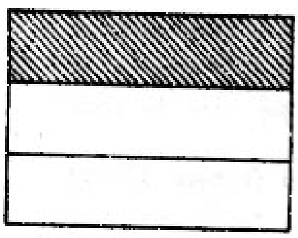
E 1 चित्र–3 और अंकिता द्वारा दी गई व्याख्या सही है। सही पहलू पर बच्चों का ध्यान केन्द्रित करने के लिए काफी चर्चा करनी पड़ती है व समय भी लगाना पड़ता है। भिन्नों के प्रतीकन का अभ्यास कराने के लिए कई उदाहरणों का सहारा लेना होता है। यह किया जा सकता है कि पूरी कक्षा को टोलियों में बांट दिया जाए और हर टोली से कहा जाए कि वह कागज के हर हिस्से को अधिक से अधिक तरीकों से व्यक्त करें। हर नया तरीका खोजने पर उस टोली को एक अतिरिक्त अंक दिया जाए। अधिकतम अंक हासिल करने वाली टोली विजेता होगी। ऐसी गतिविधियों से उन्हें अनजाने में ही हिस्सों के नामों का अच्छा अनुभव हो जाएगा। इससे उन्हें भिन्नों की तुल्यता समझने में मदद मिलेगी।

E 2 इस संदर्भ में मैं आपसे एक गतिविधि की चर्चा करना चाहूँगी जो मैंने एक कक्षा में देखी थी। शिक्षक ने कक्षा को 4–5 टोलियों में बांट दिया था। अब उन्होंने बोर्ड पर एक चित्र बनाया (चित्र–16 देखें)।



चित्र–16

शिक्षक ने बच्चों से कहा कि वे इसे कागज पर बना लें और गोल घेरे से घिरे हिस्से के बारे में जो कुछ बता सकते हैं बताएं। बच्चों ने अपनी–अपनी टोली में काम किया और निष्कर्ष लिख लिए। उन्होंने एक–दूसरे को यह भी समझाया कि उस हिस्से को उन्होंने वही नाम क्यों दिया। इसे 'आधा' कहेंगे क्योंकि पूरे कागज पर इसके समान हिस्से हैं। इसे 'चार–आठवा हिस्सा' कहेंगे क्योंकि दो आयत 'आठवां हिस्सा' हुए और इस तरह के यहां चार हिस्से हैं। इस तरह से शिक्षक ने उनसे उनके हर उत्तर का कारण भी पूछा जैसे घिरा हुआ हिस्सा क्यों दो चौथाई है या 'आठ–सोलहवां' है या 'चार–सोलहवां' वगैरह है। बच्चों ने इन नामों को शब्दों में भी लिखा और भिन्न संख्या के रूप में भी, क्योंकि हर नए तरीके से लिखने का उन्हें एक अंक मिलता था। इस गतिविधि के जरिये शिक्षक को यह पता चला कि बच्चों को भिन्नों के प्रतीकन का कितना तजुर्बा है।

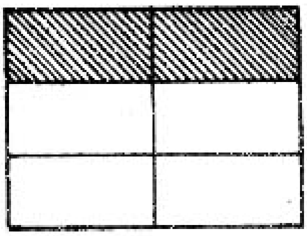


चित्र–17

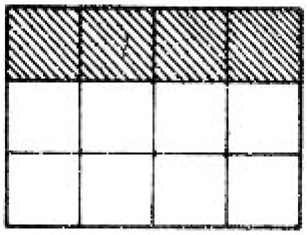
E3 $\frac{1}{3}$ के तुल्य भिन्न दर्शाने के लिए एक आयताकार कागज लेकर उसको तीन बराबर हिस्सों में मोड़ लें। अच्छे से दबाकर इसे खोल लें। कागज तीन बराबर हिस्सों में बंट जाएगा (चित्र–17 देखें)। कागज को एक बार फिर मोड़कर खोल लें (चित्र–18 देखें)। कागज अब छः बराबर हिस्सों में बंट गया है। इस क्रिया को एक बार और दोहराएं और चित्र–19 में दिखाए अनुसार कागज 12 बराबर हिस्सों में बंट जाएगा। अब चित्र–17 में $\frac{1}{3}$ हिस्से को, चित्र–18 में $\frac{2}{6}$ हिस्से को तथा चित्र–19 में $\frac{4}{12}$ हिस्से को रंगकर आप बता सकते हैं कि $\frac{1}{3}=\frac{2}{6}=\frac{4}{12}$

चित्र–17, 18 व 19 की मदद से आप यह भी दिखा सकते हैं कि $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{6}$ और $\frac{4}{12}$ आपस में तुल्य हैं।

$\frac{1}{4}$ के तुल्य भिन्न भी कागज मोड़ने की गतिविधि के जरिये दिखाए जा सकते हैं। इसके लिए आपको शुरू में कागज को चार बराबर हिस्सों में मोड़ना होगा।



चित्र–18



चित्र–19

E4 ऐसी गतिविधियों की उपयोगिता आंकने के लिए मैंने कुछ शिक्षकों से बातचीत की। उनमें से कुछ की राय थी कि ऐसी गतिविधियों से बच्चों को तुल्यता की बात समझने में जरूर मदद मिलती है। उनका कहना था कि ऐसी गतिविधियों से बच्चों को यह देखने व समझने में मदद मिलती है कि क्यों $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{6}$ के तुल्य है और $\frac{2}{6}$, $\frac{4}{12}$ के। इस तरह की गतिविधियों से उन्हें अपनी गलतफहमियों दूर करने में भी मदद मिलती है। बड़ी संख्या में ऐसे उदाहरणों को हल करके बच्चे इनमें निहित पैटर्न पहचान पाएंगे। परन्तु यह आवश्यक नहीं कि आप इससे सहमत ही हों। अच्छा यह होगा कि आप अपनी कक्षा में इन गतिविधियों को आजमाएं और इनके बारे में अपनी राय लिखें।

E5 इसका मूल्यांकन करने का एक तरीका यह हो सकता है कि आप बच्चों से किसी भिन्न के तुल्य भिन्न लिखने का अभ्यास करवाएं जिसके अंश व हर मूल भिन्न से छोटे हों। फिर कक्षा में घूमकर आप उनके जवाबों की जांच कर सकते है। बीच–बीच में उनसे कागज मोड़कर अपने उत्तर की जांच करने को भी कह सकते हैं।

E6 यह काम कागज मोड़कर या रंगकर किया जा सकता है। बच्चों से बराबर माप के दो कागज लेने को कहें। एक को 6 बराबर हिस्सों व दूसरे को 4 बराबर हिस्सों में मोड़ें। उनसे पहले कागज में से 5 हिस्सों में हरा रंग भरने को और दूसरे कागज में 4 में से 3 भाग लाल रंगने को कहें। अब उनसे कहें कि रंगे हुए भाग की तुलना करके बताएं कि $\frac{5}{6}$ और $\frac{3}{4}$ बराबर हैं या नहीं। यही गतिविधि 12–12 कंचों के दो समूह लेकर भी की जा सकती है। पहले समूह को 2–2 कंचों के 6 समूह में बांट दें। अब देखें कि ऐसे 5 समूहों में कुल मिलाकर कितने कंचे हैं।

दूसरे समूह को 3–3 कंचों के 4 समूहों में बांट दें और देखें कि ऐसे तीन समूहों में कुल कितने कंचे हैं। अब आप आसानी से दिखा सकते हैं कि $\frac{5}{6}$ और $\frac{3}{4}$ बराबर नहीं है।

E7 $\frac{5}{4}$ दिखाने के लिए कागज मोड़ने की आसान–सी गतिविधि की जा सकती है। विभिन्न चरण निम्नानुसार होंगे :

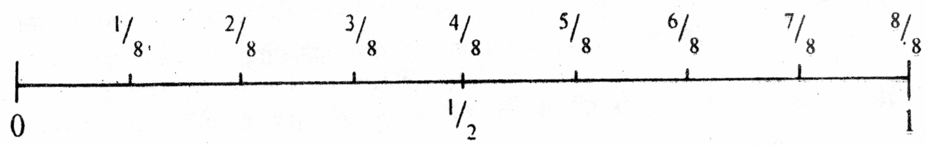
चरण 1 : एक कागज को चार भागों में मोड़ दें।

चरण 2 : एक हिस्सा बताएं जो पूरे का एक–चौथाई हो। क्या आप 5 एक–चौथाई हिस्सों को रंग सकते हैं? नहीं ! 5 एक–चौथाई हिस्से दिखाने के लिए हमें एक और कागज की जरूरत होगी।

चरण 3 : एक और कागज को मोड़ें। इसके 4 हिस्सों में एक हिस्सा काट लें और इसे पहले कागज के साथ चिपका दें। अब आप $\frac{5}{4}$ दिखा सकते हैं।

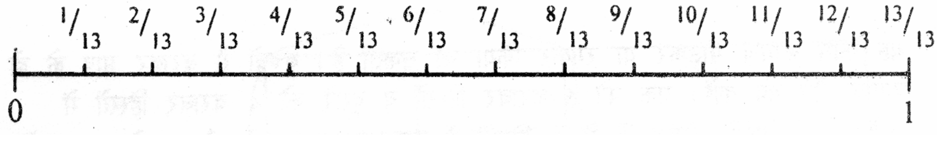
E8 संख्या रेखा पर $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \ldots\ldots\ldots\ldots > \frac{1}{10}$ दिखाते वक्त यह ध्यान रखें कि हर बार जब आप संख्या रेखा बनाएं, और इस पर एक इकाई दूरी लें, तो यह दूरी हर बार एक ही हो। बाद में भी जब इस इकाई दूरी को छोटे–छोटे हिस्सों में बांटें तो हर हिस्से की लम्बाई बराबर हो ताकि बच्चे यह देख सकें कि $\frac{1}{8} < \frac{1}{7}$ है या $\frac{1}{7} < \frac{1}{6}$ है। यह शिक्षकों का मत है कि संख्या रेखा के प्रयोग से भिन्न की संकल्पना को संख्या की संकल्पना से जोड़ने में मदद मिलती है।

E9 $\frac{12}{13}, \frac{7}{8}$ से बड़ा है, इस बात को संख्या रेखा से भी दिखाया जा सकता है चित्र–20 के अनुसार आप दिखा सकते हैं कि $\frac{8}{8}$ एक पूर्ण है



चित्र–20

जबकि $\frac{7}{8}$ उससे 1 भाग यानी $\frac{1}{8}$ कम है। इसी प्रकार से $\frac{13}{13}$ एक पूर्ण है और $\frac{12}{13}$ उससे एक भाग यानी $\frac{1}{13}$ कम है (देखें चित्र–21)



अब बताइए कि $\frac{1}{13}$ छोटा है या $\frac{1}{8}$? इसका उत्तर बच्चों को निकालने दीजिए और उसके बाद तय करने दीजिए कि $\frac{12}{13}$ और $\frac{7}{8}$ में से कौन–सा बड़ा है। यदि किसी बच्चे को कठिनाई हो, तो कुछ और सवाल पूछ कर उसकी मदद करें।

E10 ऐसा लगता है कि मिनी को प्रत्यक्ष चीजों या कागज मोड़ने/रंगने की गतिविधियों के जरिये यह समझने का मौका कभी न मिला था कि $\frac{7}{4}$ होता क्या है। वह $\frac{7}{4}$ या $\frac{11}{6}$ जैसी संख्याओं को मात्र विषम भिन्न के रूप में जानती थी, जिन्हें मिश्रित भिन्न में तब्दील करना होता है। वह तो इतना जानती थी कि शिक्षक ने उसे यह काम करने का एक तरीका भी बताया था।

E11) मिनी की गलती सुधारने के लिए जरूरी था कि वह यह समझे कि $\frac{7}{4}$ का मतलब होता है – 4 भागों में से 7 भाग। जिसके लिए हमें एक समूचा पूर्ण लेना होगा तथा एक और पूर्ण के 4 हिस्सों में से तीन हिस्से लेने होंगे। उसे यह समझाया जाना चाहिए कि $\frac{7}{4} = 1$ पूर्ण तथा $\frac{3}{4}$ और। यही काम हम कागज मोड़ने की गतिविधि की मदद से भी कर सकते हैं। हम दिखा सकते हैं कि $\frac{7}{4} = 1 + \frac{3}{4} = 1\frac{3}{4} = \text{भागफल}\frac{\text{शेषफल}}{\text{भाजक}}$

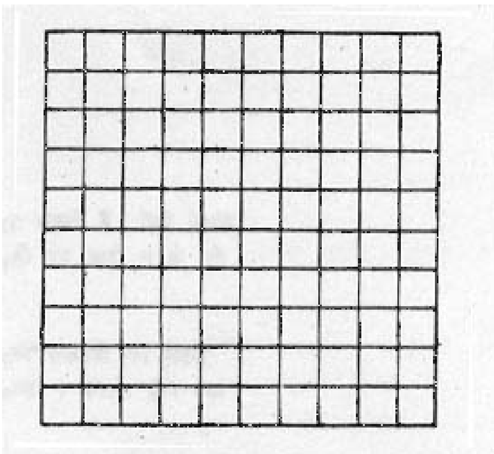
पाठ–9

E1 सबसे पहले यह पता करें कि क्या वह 0.6 और 0.06 में अन्तर समझती है। अब उससे पूछ सकते हैं कि यदि वह 0.06 को शून्य दशमलव छः बोलेगी तो 0.6 को क्या कहेगी? यह सवाल शायद उसे सोचने को उकसाए।

E2 गौर करें कि उदाहरण 1 में शिक्षक तथ्य पर तथ्य बताती जा रही हैं और उनके पीछे जो तर्क है वह नहीं बता रही हैं। इस तरीके का फायदा है कि यह शिक्षक के लिए आसान और सीधा है। इन शिक्षक तथा कई और शिक्षकों ने पाया है कि इस उम्र के बच्चे नियमों के पीछे का तर्क समझने में समर्थ नहीं होते। इसलिए बेहतर यही है कि उन्हें इस नियम का बारम्बार अभ्यास करने दिया जाए। आगे चलकर वे इसके पीछे का तर्क भी समझ जाएंगे। परन्तु सवाल यह है कि क्या यह तरीका बच्चों में गणितीय ढंग से सोचने की क्षमता विकसित करने में मददगार होता है?

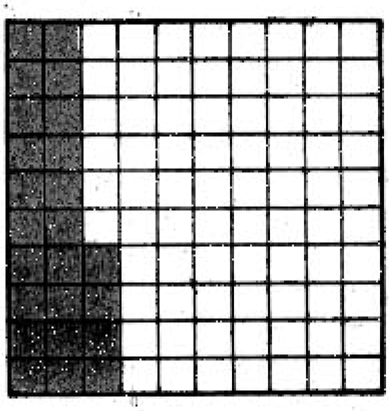
E3 शिक्षण की दूरगाती गुणवत्ता के विषय में विचार कीजिए।

E4 एक गतिविधि 'वर्ग को 100 भागों में बांटने' की हो सकती है। बोर्ड पर एक बड़ा वर्ग बनाएं। एक बच्चे से कहें कि वह इसे 10 छोटे वर्गों की दस कतारों में बांट दें। (चित्र 5 देखिए)

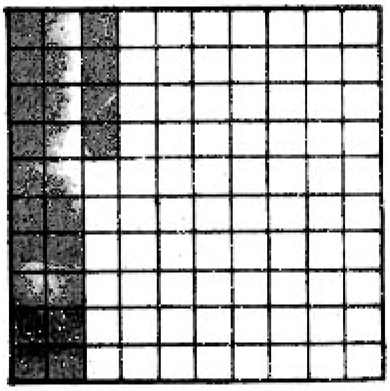


चित्र 5

लम्बे, पतले आयत को चिन्हित कर दें। यह बड़े वर्ग का दसवां हिस्सा है। इससे बच्चों को यह देखने में मदद मिलती है कि वर्ग के दस सौवें भाग एक दसवें भाग के बराबर होते हैं। बच्चों को वर्ग के दसवें तथा सौवें भाग कही जाने वाली आकृतियों को पहचानने के लिए काफी समय दिया जाना चाहिए। एक मर्तबा वे ये आकृतियां पहचान ले तो उनसे पूछा जा सकता है कि वर्ग के कितने सौवें भाग मिलकर एक दसवां भाग बनता है, दो दसवें भाग कितने सौवें भाग से बनेंगे आदि। इसके बाद वर्ग का कुछ हिस्सा रंगा जा सकता है मसलन उनसे 24 सौवें भाग के बराबर हिस्सा लाल रंगने को कह सकते हैं (चित्र 6 क)। अब उनसे पूछिए कि इसमें कितने दसवें भाग हैं। इन दसवें भागों को काला रंगने को कहिए (देखें चित्र 6)।



(क)



(ख)

चित्र 6

अब कुल रंगे हुए भाग को 2 दसवें और 4 सौवें के रूप में पहचान सकते हैं। अब तक वे यह तो जान ही चुके होंगे कि 2 दसवें और चार सौवें को .24 लिख सकते हैं। अब हम बच्चों से विभिन्न भाग रंगने को कहें तथा उनसे संबंधित संख्या को दशमलव रूप में लिखने को कहें। इसके बाद कोई संख्या देकर उसके अनुसार दसवें व सौवें भाग रंगने को कह सकते हैं। इस गतिविधि को आजमाकर इसका असर देखिए। निम्नलिखित अभ्यासों के जरिये आप यह आकलन भी कर सकते हैं कि यह गतिविधि बच्चे की दशमलव की समझ बेहतर बनाने में कितनी उपयोगी रही है :

1. ग्यारह दसवें भाग, नौ सौवें भाग जैसी संख्याओं को दशमलव के रूप में कैसे लिखोगे?
2. खाली स्थान भरो

   छः दसवें भाग = ... सौवें भाग।
3. निम्नलिखित संख्याओं को छोटी से बड़ी के क्रम में जमाओ

   1.32, 0.89, 3.04, 2.09

E6 गलत। बच्ची नियम को समझे बगैर भी सही–सही लागू कर सकती है। ऐसी स्थिति में यदि उसे थोड़ा अलग किस्म का सवाल दिया जाए, जिसकी वह आदी न हो, तो हो सकता है कि वह नियम लागू न कर पाए।

E7 यह इस धारणा से हो सकता है कि शिक्षक ने उन्हें दशमलव संख्याओ को सैकड़े, दहाई, इकाई, दसवें आदि के रूप में लिखने को पर्याप्त अभ्यास न कराया हो। क्या नीचे दिए गए तरीके से इसमें कुछ सुधार हो सकता है?

चरण 1 : पहले यह ठीक कर लें कि बच्चे एक दशमलव संख्या को दहाई, इकाई, दसवें आदि के multiple के रूप में लिख सकते हैं।

चरण 2 : फिर उन्हें पूर्णांकों को जोड़ने का तरीका याद दिलाएं जैसे कि 219 + 73. वे यह 3 को 9 के नीचे लिखकर कर सकते हैं यानी 'इकाई' को 'इकाई' के नीचे, दहाई को दहाई के नीचे आदि। यानी दशमलव संख्याओं को भी इसी तरह जोड़ा जाता हैं – सौवें हिस्से को सौवें के नीचे लिखकर दसवें को दसवें के नीचे लिखकर आदि। उदाहरण के लिए माना कि हमें 18.7 और 20.65 को जोड़ना हैं। तो हम 2 को 1 के नीचे दहाई वाले स्तंभ में रखेंगे आदि। विद्यार्थी सोच सकते हैं कि 20.65 में 5 का क्या करें – क्योंकि 18.7 में उसके संगत कोई अंक नहीं है। तब हम उन्हें बता सकते हैं कि 18.7 में कोई सौवां हिस्सा नहीं है और यह इस स्तंभ में शून्य लिखने के बराबर है। अब सौवें स्तंभ में बच्चे 5 को 0 के नीचे रख सकते हैं।

E8 विभिन्न चीजें खरीदते वक्त हिसाब रखना एक ऐसी स्थिति हो सकती है जहां उन्हें दशमलव संख्याओं का परोक्ष इस्तेमाल करना पड़ता हो। परन्तु यह ध्यान रखें कि पैसे से परिचित होने के कारण वे ये जोड़ आसानी से कर लेते हैं। हो सकता है कि इसमें वे दशमलव पद्धति का उपयोग ही न करते हों।

क्या किसी बच्चे ने निम्नलिखित स्थिति सोची? जैसे, उसे अपने लिए एक स्कर्ट और एक ब्लाउज चाहिए। यदि स्कर्ट में 3 मीटर 50 सेमी. कपड़ा लगता है और ब्लाउज में 1 मीटर 70 सेमी. कपड़ा लगता है तो उसे यह पता करना होगा कि कुल कितना कपड़ा खरीदे। क्या वह दशमलव पद्धति की जानकारी का इस्तेमाल कर रही है? मुद्दा यह है कि स्थिति ऐसी हो कि उन्हें उस कार्य में दशमलव पद्धति की जानकारी का वास्तव में इस्तेमाल करना पड़ें।

E9 हम अभ्यास 4 में बता ही चुके है कि वर्ग को 100 भागों में बांटकर किस तरह दशमलव संख्या दर्शाई जा सकती है। शुरू में मात्र उन संख्याओं पर गौर कीजिए जिनका जोड़ 1 से कम होता हो। हम 0.31 + 0.25 जैसे जोड़ सिखाने के लिए तो उसी वर्ग का इस्तेमाल कर सकते हैं। पहले उनसे कहें कि वर्ग पर 0.31 चिन्हित कर दें। उसके बाद दसवें भाग को काले से तथा सौवें भागों को लाल से रंग दे। अब इसी प्रकार से 0.25 दर्शाने को कहें। इसमें भी दसवें भाग तथा सौवें भाग को रंग दें। अब हम उनसे कह सकते हैं कि कुल दसवें भाग तथा सौवें भाग गिन लें। उन्हें यह दिख जाएगा कि 6 सौवें भाग तथा 5 दसवें भाग इन संख्याओं का जोड़ है।

अगले चरण में आप उन्हें 0.18 + 0.23 जैसा सवाल दे सकते हैं। इसमें उनमें 10 सौवें भाग = एक दसवां भाग का समीकरण लगाना पड़ेगा। इसके बाद हम उन्हें 0.06 + 0.25 और 0.7 + 0.04 जैसे सवाल दे सकते हैं।

जब उन्हें वर्ग का उपयोग करके जोड़ने का काफी अभ्यास हो जाए, तब हम वर्ग के साथ–साथ सामान्य जोड़ भी शुरू करवा सकते हैं। यह याद रखें कि हम ऐसी संख्याओं का ही उपयोग कर रहे हैं जिनमें पूर्णांक शून्य है। आगे चलकर हम 18.7 + 20.65 जैसे जोड़ के सवाल भी दे सकते हैं।

क्या आपको नहीं लगता कि जिन बच्चों को 100 भागों में बंटे वर्ग पर दशमलव संख्याएं दर्शाने का अभ्यास मिला है, उनको यह तरीका आसान लगेगा? इस तरीके का एक फायदा यह है कि इसमें हमें यह प्रत्यक्ष अहसास मिलता है कि हम दसवें भाग, सौवें भाग, दहाई, इकाई आदि को जोड़ रहे हैं। हो सकता है कि शुरू में बच्चों को दसवें तथा सौवें भाग के परस्पर संबंध को लेकर थोड़ा भ्रम रहे। एक बार वह साफ हो जाए तो यह तरीका बेहतर होता है। क्यों न आप खुद इसे आजमाकर इसका असर देख लें?

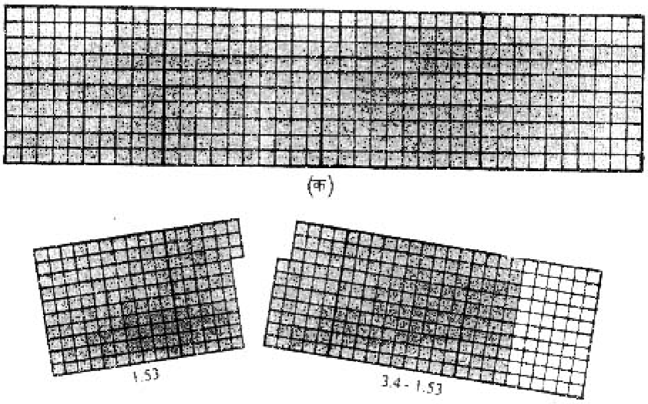
E10 प्रत्येक गलती का संबंध इस बात से है कि बच्ची 3.4 में सौवें भाग के स्थान पर अंक न होने के मसले से जूझ रही है।

क. बच्ची ने यह गलती शायद इस वजह से की होगी : वह यह तो जानती है कि पहली पंक्ति में 3.4 और दूसरी पंक्ति में 1.53 होगा मगर वह भ्रमित इस बात से हो रही है कि 1.53 के अंक 3 के ऊपर कोई अंक नहीं है। भ्रमित होकर वह अंकों की अदला–बदली कर देती है।

इसे दुरूस्त करने के लिए मैं पहले यह करती कि उसे 3.4 और 11.9 जोड़ने को कहती और देखती कि क्या उसका उत्तर 1.53 आता है। इससे उसे यह समझने में मदद मिलती कि उसने गलती की है। इसके बाद मैं कोशिश करती कि वह दशमलव पद्धति में स्थानीय मान का तरीका समझ पाए। इससे उसे पता चलता कि 3.4 में सौवें भाग के स्थान पर अंक नदारद होने पर क्या किया जाए।

ख. और ग. को भी आप इसी तरह देख सकते हैं। इस संदर्भ में आप कई शिक्षण विधियां लिख सकते हैं।

E11 यहां हम संक्षेप बताएंगे कि घटाना सिखाने में वर्ग चार्ट का उपयोग कैसे किया जा सकता है। मान लीजिए कि 3.14 − 1.53 करना है। एक बड़े चार्ट पर 100 भागों में बंटे 4 वर्ग बनाइए (चित्र 7 क देखें)।



चित्र 7 क. लाल रंग भाग 3.4 दर्शाता है।

ख. 3.4 –1.53 दिखाता है।

अब 3.4 दर्शाते भाग में से 1.53 भाग मिटा दीजिए (चित्र ख)।

इन वर्गों का उपयोग करके आप बच्चों को घटाने का काफी अभ्यास करवा सकते हैं।

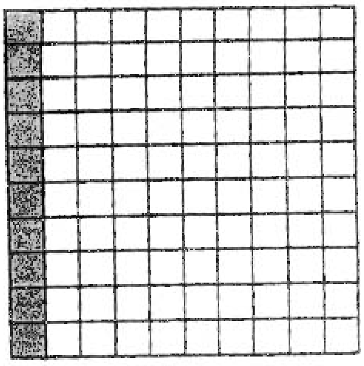
इसके बाद आप इन संख्याओं को एक के ऊपर एक लिखवाकर घटाकर दिखा सकते हैं जैसे कि 3.4–1.53 साथ ही वर्ग के द्वारा उत्तर की जांच हो सकती है। फायदा यह होगा कि यदि उन्हें सीधे तरीके में दिक्कत आती है तो वे वर्ग वाली गतिविधि पर लौटकर उसी सवाल को हल कर सकते हैं। इससे उन्हें नियम लागू करने में आत्मविश्वास आएगा। इस गतिविधि को अपने आसपास के बच्चों के साथ आजमाकर आप देख सकते हैं कि क्या वाकई इससे मदद मिलती है।

E12 शुरूआत आप इन्हें $0.1 \times 0.1 = 0.01$ समझाकर कर सकते हैं। सबसे पहले उनसे कहें कि वे दशमलव को भिन्न में बदल लें, यानी

$$.1 \times .1 = \frac{1}{10} \times \frac{1}{10}$$

अब $\frac{1}{10} \times \frac{1}{10}$ का मतलब है पूरे $\frac{1}{10}$ का $\frac{1}{10}$ पूरे $\frac{1}{10}$ का $\frac{1}{10}$ निकालने के लिए 100 भागों में बंटे वर्ग को लीजिए।

सबसे पहले $\frac{1}{10}$ दर्शाने वाले हिस्से को चिन्हित कर दें। उसके लिए आपको चित्र 8 में दिखाए अनुसार एक पट्टी को लाल रंगना होगा।

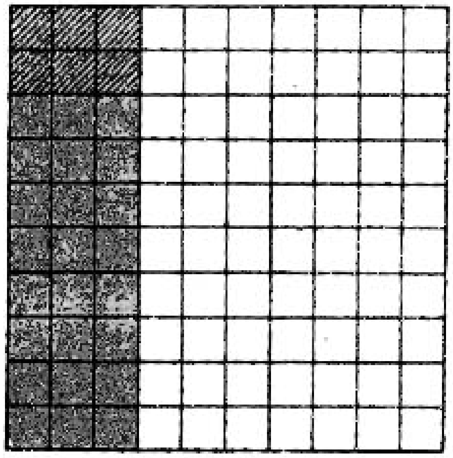


चित्र 8

यह देखने के लिए यह $\frac{1}{100}$ होगा, इस लाल रंग के हिस्से के $\frac{1}{10}$ भाग को काले से दोहरा रंग दीजिए। यह दोहरा रंगा हिस्सा $\frac{1}{100}$ होगा।

अतः $.1 \times .1 = \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = 0.01$

इसके बाद आप गुणा के ऐसे सरल उदाहरण बता सकते हैं जिनका गुणनफल 1 से कम हो। जैसे $.2 \times .3$ आदि। ऊपर के उदाहरण की तरह इन्हें भी भिन्न में बदल लें। ऐसा करने पर $.2 \times .3 = \frac{2}{10} \times \frac{3}{10}$ मिलेगा। सबसे पहले 100 भागों में बंटे वर्ग में $\frac{3}{10}$ को लाल रंग कर लें (देखें चित्र 9)।



चित्र 9

अब लाल रंगे हुए हिस्से का $\frac{2}{10}$ पता लगाइए। इसके लिए हमें उस हिस्से को 10 भागों में बांटकर उसके 2 भाग लेने होंगे। चित्र 9 में हमने रंगीन हिस्से के दस भाग करके उसमें से 2 हिस्सों को स्लेटी कर दिया है। अब स्लेटी रंग का भाग $\frac{2}{10} \times \frac{3}{10}$ दर्शाता है। अब देखिए कि उस हिस्से में 6 छोटे वर्ग हैं 0.06 संख्या दर्शाता है। लिहाजा हमने दिखा दिया कि $.2 \times .3 = 0.06$ होता है।

E13) यदि 4 बच्चे हों, तो निम्नानुसार एक खेल बन सकता है।

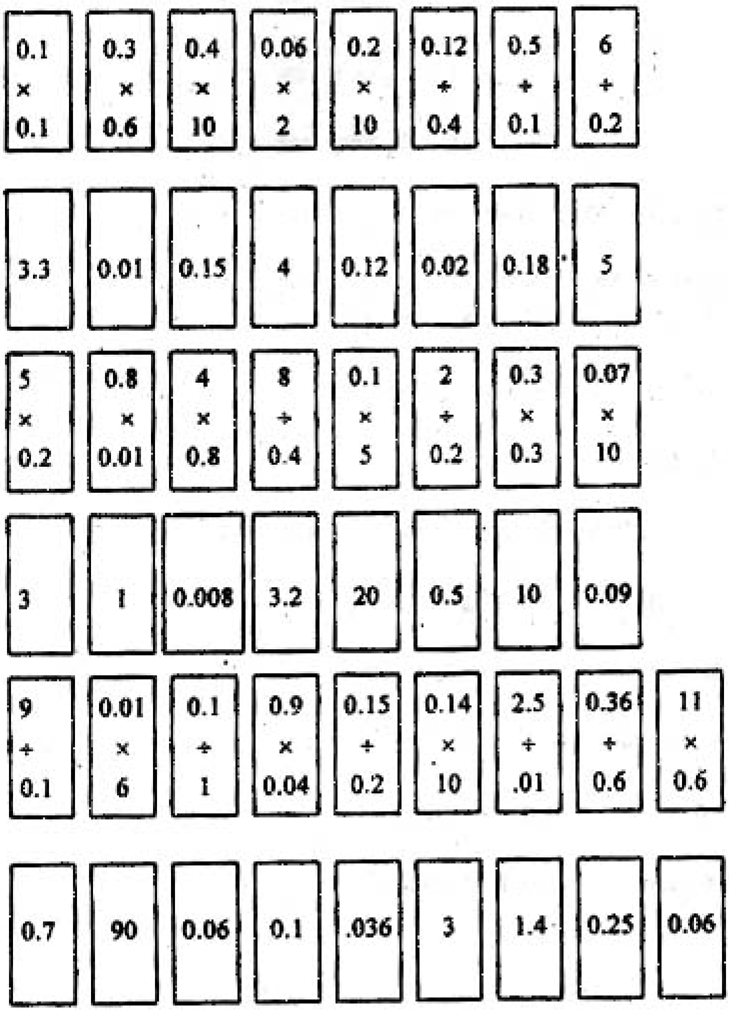
आप पच्चीस कार्ड बना ले जिनके एक तरफ भाग या गुणा के सवाल लिखे हों और दूसरी तरफ उत्तर हों। एक कार्ड के सवाल का उत्तर अगले सवाल वाले कार्ड के पीछे लिखा हो। आखिरी कार्ड के सवाल का उत्तर सेट के पहले कार्ड के पीछे होगा। उत्तरों में कोई उत्तर दोबारा न आए (चित्र 10 देखें)।

0.1	0.3	0.4	0.06	0.2	0.12	0.5	6	Reverse of the above card
$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\div$	$\div$	$\div$	
0.1	0.6	10	2	10	0.4	0.1	0.2	

3.3 0.01 0.15 4 0.12 0.02 0.18 5

5	0.8	4	8	0.1	2	0.3	0.07
×	×	×	÷	×	÷	×	×
0.2	0.01	0.8	0.4	5	0.2	0.3	10

Reverse of the above card



चित्र 10

इन कार्डों को अच्छे से फेंटकर चारों बच्चों में बराबर–बराबर बांट दें। शेष बचे कार्ड को मेज के बीचों बीच ऐसे रखें कि सवाल ऊपर की ओर हो। अब मान लीजिए सवाल 0.3×0.6 हो, तो आप उनसे पूछिए कि इसका उत्तर किसके पास है। जिसके पास 0.18 का कार्ड हो वह उसे सवाल वाले कार्ड के पास रख दें। यादि सब इस उत्तर से राजी हों, तो कार्ड को उलट दें ताकि पीछे लिखा प्रश्न ऊपर आ जाये यह सवाल 0.4×10 हो। जिसके पास इसका जवाबी कार्ड हो वह उसे मेज पर रख दे। खेल तब तक चल सकता है जब तक कि सारे कार्ड खत्म न हो जाएं।

इसे अपने आसपास के बच्चों के साथ करके देखें कि यह कितना असरदार है।

E14 संख्या की क्रियाओं को लेकर बच्चों की समझ परखने का एक तरीका यह है कि उनसे इबारती सवाल पूछे जाएं।

क. निम्नलिखित प्रश्नों में पहले तो यह पहचानना है कि आपको कौन सी क्रिया करनी होगी और फिर वास्तव में गणना करके उत्तर निकालना है।

उदाहरणार्थ, मान लीजिए कि सवाल इस प्रकार का है : राजू अखबार बांटकर रु. 1.45 प्रति घण्टा कमाता है। वह पांच घण्टे में कितना कमा सकता है?

(i) $1.45+5$ (ii) $5-1.45$

(iii) 1.45×5 (iv) $\frac{1.45}{5}$

अब, $1.45\times5=7.25$

अतः उत्तर है 7.25.

इसी प्रकार आप बच्चों से ऐसे सवाल पूछ सकते हैं :

क. एक कार एक लीटर पेट्रोल से 15.80 किलोमीटर चलती है। 70.50 लीटर पेट्रोल से वह कितने किलोमीटर जा सकती है?

1. $15.80+70.50$ 2. $15.80-70.50$
3. 15.80×70.50 4. $70.50\div15.80$

ख. 3.4 मीटर कपड़े की कीमत 40 रुपए है। 1 मीटर कपड़े की कीमत क्या होगी?

1. $40-3.4$ 2. $3.4-40$
3. 40×3.4 4. $40\div3.4$

ग. नीचे हर सवाल में बड़ी संख्या को गोले में घेर दो :

1. $5\times0.4, 5\div0.4$ 2. $0.4\times0.8, 0.8\div0.4$
3. $0.6\times3, 3\div0.6$ 4. $0.7\times0.5, 0.7\div0.5$

पाठ–10

E1) कागज़ की पट्टियां और धागा आसानी से उपलब्ध होते हैं। इनकी मदद से सीधे कोरों वाली तथा गोलाईदार कोरों वाली बन्द व खुली आकृतियां दिखाई जा सकती हैं। गतिविधियों में बच्चों को यकीनन मज़ा आता है। इन गतिविधियों के लिए जियो बोर्ड का सफलतापूर्वक इस्तेमाल किया जा सकता है।

E2) आपने कक्षा में सीखने के जो भी अनुभव दिए हों उन्हें लिख लीजिए। इकाई में दिया गया गतिविधि आधारित तरीका आजमाने के बाद पता कीजिए कि यह कितना कारगर रहा।

E3) खपच्चियों, रंग–बिरंगी स्ट्रॉ, धागे व तार के साथ कई गति गतिविधियां की जा सकती हैं। सीधे कोरों वाली आकृतियां तो मात्र खपच्चियों से बन जाती हैं। गोलाईदार कोर बनाने के लिए धागे तथा तार का इस्तेमाल किया जा सकता है। खुली आकृतियां बनाने के लिए चाहे जितनी खपच्चियों का इस्तेमाल किया जा सकता है। बच्चों को यह पता लगने दें कि 2 खपच्चियों से बन्द आकृति नहीं बनाई जा सकती।

E4) ज्यामिति की कक्षा में जियोबोर्ड एक निहायत उपयोगी चीज़ साबित होता है। इसकी मदद से लगभग सभी मूलभूत अवधारणाएं पढ़ाई जा सकती हैं। धागे के एक सिरे को एक कील से बांध दीजिए। अब यदि इस धागे को अन्य कीलों पर से निकालते हुए आप इसके दूसरे सिरे को वापिस उसी कील पर बांध दें जहां से शुरू किया था तो बन्द आकृति मिलती है जबकि यदि दूसरे सिरे को किसी अन्य कील पर बांधे तो खुली आकृति मिलती है। ऐसी गतिविधियों में बच्चों को मज़ा भी आता है।

E5) कक्षा 4 के किसी बच्चे का परीक्षण समतल व असमतल सतह के संदर्भ में कीजिए। इकाई में दी गई गतिविधि को आजमाइए और इस सम्बंध में अपने निष्कर्ष लिखिए कि क्या इससे सचमुच बच्चे को अवधारणा समझने में मदद मिली या नहीं।

E6) समतल सतह पढ़ाने के जो दो तरीक़े इकाई में सुझाए गए हैं उनकी खामियां बताइये। एक अन्य गतिविधि यह हो सकती है कि बच्चों को अपने आसपास की तमाम चीज़ों के नाम बताने को कहा जाए। जब बच्चे नाम बताएं तो शिक्षक इन्हें ब्लैक बोर्ड पर तीन कॉलम में लिख सकते हैं। पहले कॉलम में ऐसी चीज़ों के नाम जिनकी सतह समतल है, दूसरे कॉलम में सिर्फ असमतल सतह वाली चीज़ों के नाम तथा तीसरे कॉलम में ऐसी चीज़ों के जिनकी समतल व असमतल दोनों सतह हों।

अब बच्चों से पहले कॉलम की चीज़ों की समान विशेषताएं खोजने को कहिए वे यह भी पता लगाएं कि ये चीज़े अन्य कॉलम की चीज़ों से कैसे अलग हैं।

E7) बच्चों को 10 सें. मी., 5 सें, मी, व 4 सें मी, की तीन खपच्चियां दीजिए। उनसे कहिए कि वे इन्हें किसी भी तरह जमाकर एक तिकोन बनाएं। वे ऐसा नहीं कर पाएंगें। फिर उन्हें 8 से. मी., 4 सें. मी., की तीन खपच्चियां दीजिए। इस बार भी वे तिकोन नहीं बना पाएंगे। इस तरह आप उन्हें कुछ और मौके दे सकते हैं। इसके बाद उनसे चर्चा कीजिए कि क्यों किसी भी लम्बाई की तीन खपच्चियों से तिकोन नहीं बनाया जा सकता।

E8) हर बच्चे को समलम्ब, आयत, वर्ग आदि की आकृति में कटा कागज या खपच्ची से बनी आकृति वाली चीज़ें कक्षा में ढूंढे।

E9) जियोबोर्ड की गतिविधि भी की जा सकती है।

E10) बच्चे शायद कहें कि यह सम्भव है। यदि ऐसा होता है तो आप उन्हें कोई असमाकृति देकर कहें कि वे इसे तिकानों या आयतों या वर्गो या वृत्तों में बांटें।

E11) अवश्य! बच्चे अपने आप सममित आकृतियों के गुणधर्म सीखते हैं।

E12) सममित आकृतियों की अवधारणा सीखने के लिए कागज़ मोड़ने व काटने की गतिविधियां बहुत उपयोगी होती हैं।

E13) इस संदर्भ में कागज़ मोड़ने की गतिविधि उपयोगी होती है।

पाठ–11

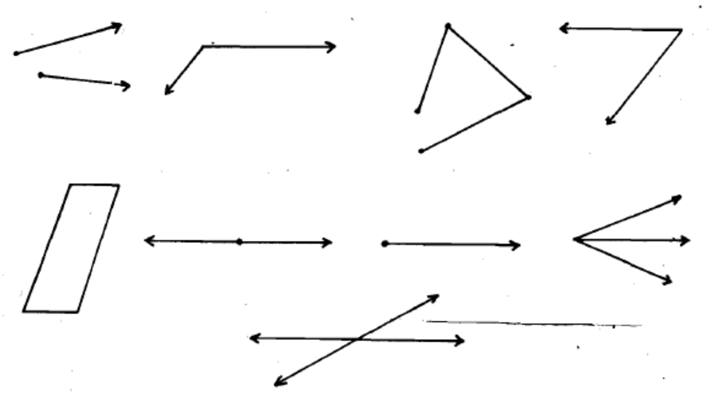
E1) आप देख सकते हैं कि उदाहरण 1 में शिक्षक का ज्यादा जोर परिभाषाओं पर है। वे 'किरण', 'रेखा' आदि की परिभाषा से शुरू करते हैं। इनका उपयोग करते हुए ही वे कोण की अवधारणा बताते हैं। जब तक बच्ची के लिए इन परिभाषाओं का कुछ मतलब न हो, तब तक वह इन पर ज्यादा ध्यान नहीं देगी। नतीजा यह होगा कि उसे अवधारणा की साफ समझ हासिल नहीं हो पाएगी। इसकी बजाय अगर शिक्षक कोण की अवधारणा समझाने के लिए रोजमर्रा के उदाहरणों का इस्तेमाल करते तो शायद बच्चे ज्यादा आसानी से इसे पकड़ पाते। दिलचस्प बात यह है कि शिक्षक ने 'किरण' का परिचय बहुत ही रोचक कहानी के जरिए दिया है। ऐसी कहानियों से बच्चों को वाकई अवधारणा समझने में मदद मिलती है। लेकिन अगर कहानी कुछ इस तरह की होती कि बच्ची उसमें हिस्सा ले सकती, तो शायद ज्यादा असरदार होती। एक अच्छी बात यह है कि शिक्षक ने अवधारणा समझाने के लिए डंठल, पत्तियों जैसी जानी पहचानी चीजों का उपयोग किया है।

E2) गौर कीजिए कि उदाहरण 2 में शिक्षक ने अवधारणा समझाने के लिए बच्चे के रोजमर्रा के अनुभव का सहारा लिया है। इससे सीखना आसान हो जाता है। दूसरी अहम बात यह है कि वे कोण के दोनों पहलू सिखाती हैं – कि 'जब दो रेखाएं मिलती है तो कोण बनाती है' और 'कोण से हमें दो दिशाओं के बीच अंतर का परिमाण पता चलाता है'। दूसरे पहलू को उभारने वाली गतिविधि शायद थोड़ी मुश्किल लगे। लेकिन आपने ध्यान दिया होगा कि शिक्षक ने दूसरा पहलू तभी उठाया जब पहले पहलू में बच्चों की समझ पुख्ता हो गई। कोण क्या है, इसको साफ–साफ समझने के लिए बच्चे के लिए दूसरा पहलू जानना जरूरी है।

इन बातों से जाहिर है कि अवधारणा की साफ विकसित करने के लिहाज से उदाहरण 1 की बनिस्बत उदाहरण 2 बेहतर है।

E3) आप बच्चे से निम्नलिखित अभ्यास/गतिविधि करने को कहें।

1. ब्लैकबोर्ड पर चित्र 21 जैसा विभिन्न आकृतियां बनाकर बच्चे से कहें कि इनमें से कोण चुनें।



चित्र 21

2. बच्चों को कोई चौकोर डिब्बा या कुर्सी या ऐसी ही किसी चीज में कोण पहचानने को कहें। चित्र में दिखाए गए तरीके से अंग्रेजी वर्णमाला के अक्षर लिखें :

A V T

और बच्चों से कहें कि हर अक्षर में कोण पहचानें।

E4) एक गतिविधि इस तरह की हो सकती है :

बच्चों से कहें कि अपनी उंगलियों से न्यून व अधिक कोण बनाएं। गतिविधि की शुरूआत इस तरह कर सकते हैं कि आप अपनी दो उंगलियों को फैलाकर बच्चों से पूछें कि क्या कोई कोण देख पा रहे हैं। यह कैसा कोण है – न्यून, अधिक या समकोण? इस गतिविधि को और आगे बढ़ा सकते हैं।

एक अन्य गतिविधि भी हो सकती है। कोई पेंसिल या छड़ या फुट्टा दीवाल से लगाकर रख दें। इसे ऊपर नीचे सरकाकर बच्चों से विभिन्न कोण देखने को कहें। हम बच्चों से घर के आसपास भी विभिन्न किस्म के कोण देखने को कह सकते हैं।

E5) कुछ जरूरी बातें नीचे दी गई हैं जो पहले से पता होनी चाहिए।

1. बच्चे को कोण पहचानना आना चााहिए।
2. उसे कोण को नापने की जरूरत का एक सहज अहसास होना चाहिए।
3. मापन मतलब तुलना करना है। दूरी नापने के अनुभव के आधार पर यह उसे पता होना चाहिए।
4. उसे दूरी नापना आना चाहिए।
5. उसे कोण के शीर्ष व भुजाओं आदि की पहचान होनी चाहिए।

E6) कुछ गलतियां इस तरह की होती हैं –

1. चांदे का मध्य बिन्दु पता लगाना।
2. मध्यबिन्दु को कोण के शीर्ष पर रखना।
3. कोण की एक भुजा को चांदे की शून्य रेखा पर रखना।
4. दूसरी भुजा से मेल खाते चिन्ह को देखना।
5. अंश को सही ढंग से पढ़ना (जो घड़ी से उल्टी दिशा में घट या बढ़ रहे होते हैं), खासकर जब भुजा बहुत छोटी हो।
6. चांदे को स्थिर रखना।

E7) खेल कुछ इस तरह का हो सकता है–

एक कागज पर मनचाही लम्बाई की एक सरल रेखा खींच दें और इसे बच्चों के एक समूह को दिखाएं। यह काम आप किसी पर्दे के पीछे छिपाकर करें ताकि समूह के सदस्य आपको यह रेखा बनाते न देख सकें। किसी किताब की आड़ में किया जा सकता है। अब रेखा समूह के हर सदस्य को दिखाई जाएगी और कहा जाएगा कि वह इसकी लम्बाई का अपना अनुमान एक चिट पर लिख लें। फिर आप किसी एक सदस्य से कहिए कि वह रेखा की लम्बाई पैमाने से नापे और बाकी सदस्यों से कहिए कि वे अपने अनुमानों की तुलना इससे करें। जिसका अनुमान वास्तविक लम्बाई के सबसे नजदीक हों उसे आप कुछ इनाम दें। यह गतिविधि अन्य इकाइयों के साथ भी कर सकते हैं।

E8) एक रेखा को इस तरह करें कि एक भाग ठीक दूसरे भाग पर आ जाए। आपको समकोण प्राप्त हो जाएगा। अब कागज को इस तरह मोड़ें कि समकोण बनाने वाले दो किनारे एक–दूसरे के ऊपर आ जाएं 45^0 का कोण मिल जाएगा।

पाठ–12

E1) रैखीय चीजें, समतल चीजें और तीन विमीय चीजें इकट्ठी की जा सकती हैं। बच्चे को इन चीजों में से कोई भी चीज दे दें। फिर उससे कहें कि वह पूरे संग्रह में से इसी साइज की एक और चीज ढूंढे। मसलन कंचे के साइज का बेर या पेंसिल के साइज की डण्डी या भारत के नक्शे में किसी प्रान्त के साइज का प्लाइवुड का टुकड़ा।

E2) हां। इनसे प्रायः मदद मिलती है। बच्चा अवलोकन व अध्यारोपण से साइज की तुलना कर पाता है। यह तरीका तब नाकाम रहता है जब तुलना की जाने वाली दोनों चीजों के साइज में अन्तर बहुत कम हो या दोनों चीजें अलग–अलग विमीय हों।

E3) यह परोक्ष विधि है। जहां अवलोकन व अध्यारोपण नाकाम रहें वहां परोक्ष विधि उपयोगी होती है।

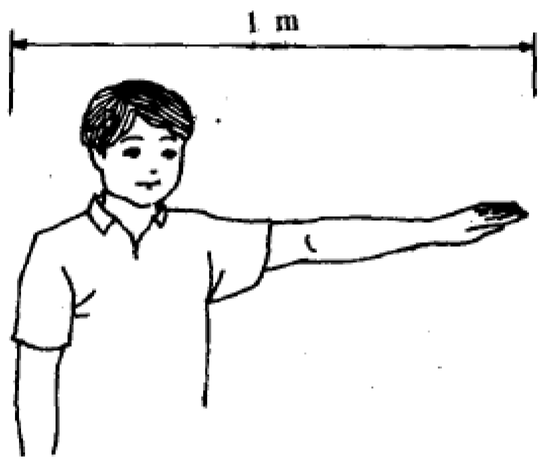
E4) अनुमान लगाना एक निहायत मुश्किल हुनर है। इस हुनर को हासिल करने के लिए निरन्तर अभ्यास जरूरी होता है। परन्तु यदि यह हुनर हासिल हो जाए तो यह दैनिक जीवन में बहुत उपयोगी होता है। अपने अनुभव से अनुमान के दो उपयोग लिखिए।

E5) विभिन्न उम्र समूह, जैसे 7 वर्ष, 10 वर्ष, 15 वर्ष के बच्चों के साथ एक गतिविधि आयोजित कीजिए। उनसे कहिए कि वे अपने बित्ते या कदम से किसी मेज़ या कमरे की लम्बाई नापें। बच्चे देखेंगे कि सबके बित्ते या कदम एक से नहीं हैं। उनमें अन्तर हैं। इससे उन्हें यह निष्कर्ष निकालने में मदद मिलेगी कि एक ही गैर–मानक इकाई से अलग–अलग व्यक्ति किसी चीज़ की लम्बाई नापें, तो नाप में अन्तर आते हैं। उससे उन्हें मापन की मानक इकाई की जरूरत का अहसास हो जाएगा।

E6) कक्षा 4 के बच्चे के साथ अपने अनुभव लिखिए।

E7) कपड़े या कार्डबोर्ड की एक लम्बी पट्टी से एक मीटर लम्बी टेप बनाई जा सकती है, बशर्ते कि यह सही लम्बाई में काटी गई हो और इस पर सेंटीमीटर के निशान लगाए गए हों। बच्चों को रूढ़िगत स्केल या टेप की बनिस्बत अपनी बनाई इस टेप का इस्तेमाल करने में ज्यादा मजा आएगा। बच्चे इस स्केल का बार–बार उपयोग सिर्फ इसलिए भी करेंगे कि इसमें उन्हें मजा आता है। इस बहाने उन्हें चीजों को नापने का खूब अभ्यास हो जाएगा, जो वे अन्यथा न हासिल कर पाएं यदि उन्हें रूढ़िगत स्केल का प्रयोग करना पड़े।

E8) मीटर स्केल या टेप से शरीर पर एक निश्चित लम्बाई को चिन्हित कर लीजिए। आम तौर से कन्धे से लेकर दूसरे हाथ की तनी हुई उंगलियों के छोर तक की लम्बाई लगभग 1 मीटर होती है (चित्र 31 देखें)। वे इस मीटर लम्बाई का उपयोग साड़ी, चादर, तौलिया वगैरह नापने में कर सकते हैं।



चित्र 31

E9) यदि बच्चा 1 मीटर लम्बाई का अनुमान लगा सकता हो, तो हम मान सकते हैं कि वह इस अवधारणा को समझता है।

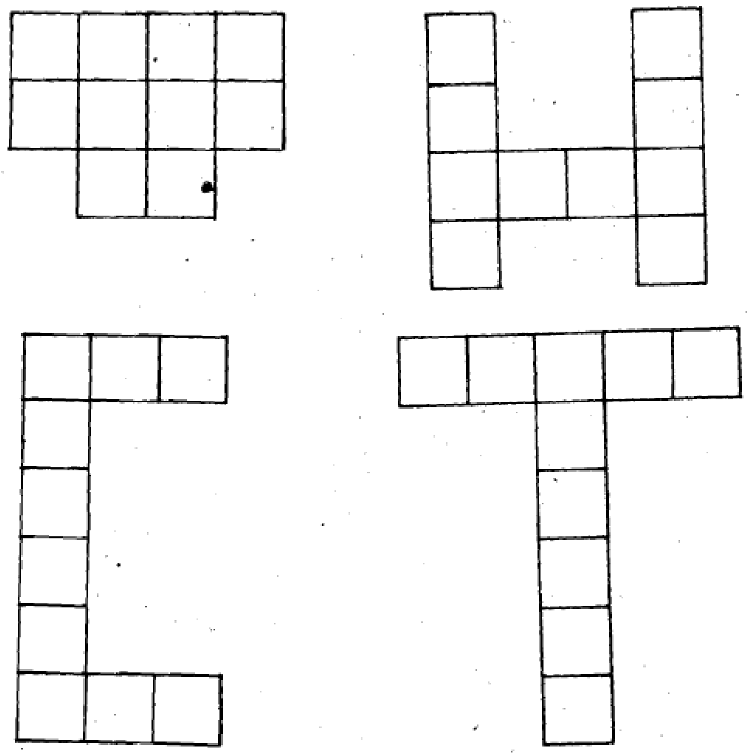
E10) जब बच्चे किसी ऐसी स्केल से नापते हैं जिस पर सिर्फ सेंटीमीटर के निशान लगे हैं, तो वे पाते हैं कि कुछ लम्बाइयां पूर्ण सेंटीमीटर की नहीं होतीं अर्थात् इनका सिरा स्केल पर लगे दो निशानों के बीच रह जाता है। इस मौके पर उनसे मापन की छोटी इकाई की जरूरत पर चर्चा कीजिए और उन्हें मिलीमीटर की इकाई से परिचित कराइए।

E11) कागज पर एक रेखा खींच दीजिए और बच्चों को एक ऐसी स्केल दीजिए जो दोनों सिरों से टूटी हो। यदि बच्चे इस स्केल का प्रयोग करके उस रेखा को सफलतापूर्वक नाप लेते हैं, तो आप निश्चित रूप से कह सकते हैं कि बच्चे लम्बाई नापना सीख चुके हैं।

E12) आपने ध्यान दिया होगा कि कई मर्तबा स्केल किनारे पर बहुत मोटी होती है। लिहाजा उन्हें पढ़ते वक्त बच्चे गलतियां करते हैं। वे यह तय नहीं कर पाते कि स्केल का कौन सा निशान चीज/रेखा के सिरे से मेल खा रहा है। स्केल को पढ़ते वकत आंख इस बिन्दु (चीज/रेखा के सिरे) के ठीक सीध में होनी चाहिए। यहां यह कहना लाज़मी है कि ऐसी स्केलों का उपयोग करना चाहिए जिनके किनारों की मोटाई कम से कम हो।

E13) एक और गतिविधि सुझाइए। मसलन उदाहरण 3 में दी गई विधि पर आधारित गतिविधि हो सकती है।

E14) बच्चों को कागज या कार्ड बोर्ड के एक ही साइज के 10 वर्गाकार/आयताकार टुकड़े काटने को कहें। इन टुकड़ों को जोड़कर वे विभिन्न आकृतियां बनाएं (चित्र 32) और देखें कि सभी आकृतियों बराबर साइज की हैं।



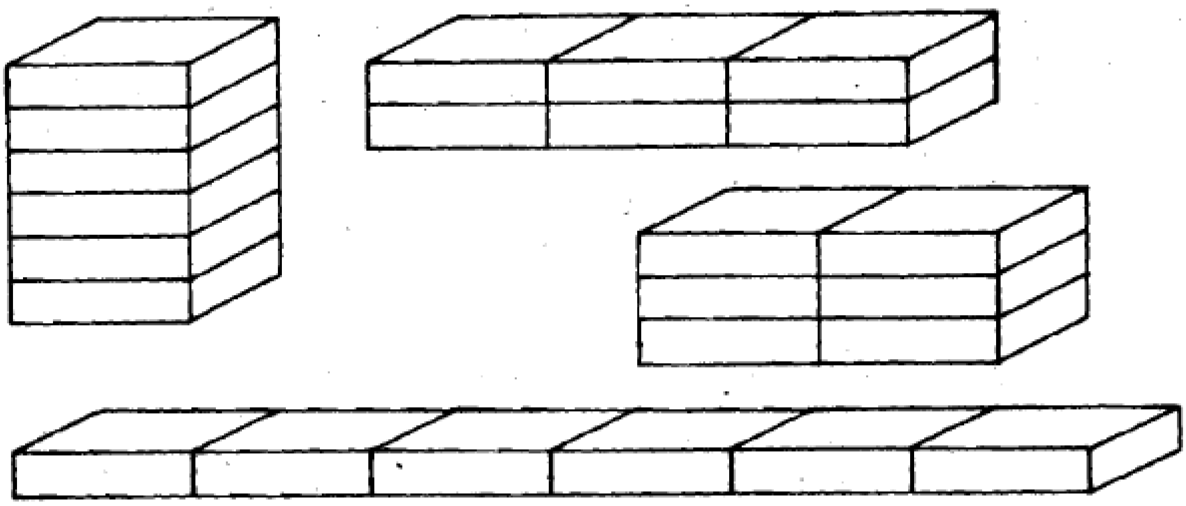
चित्र 32

E15) लम्बाई नापने की मानक इकाई का उदाहरण दिया जा सकता है। इस बात पर चर्चा की जा सकती है कि किसी दो–विमीय आकृति या डिजाइन का साइज कैसे व्यक्त करें। आकृति पर बिछाने के लिए सिक्कों, डाक–टिकटों, कार्डबोर्ड के टुकड़ों वगैरह का उपयोग करें। बच्चों को यह पता लगाने दें कि जब बिछाने का पैमाना बदल जाता है तो साइज़ का नाप भी बदल जाता है। इससे मानक इकाई की जरूरत महसूस करने में मदद मिलेगी।

E16) एक गतिविधि सुझाइए।

E17) असमाकृतियों का क्षेत्रफल निकालने के लिए ग्राफ पेपर का इस्तेमाल किया जा सकता है।

E18) खाली माचिसों से बच्चे खम्भों जैसे ढांचे बनाएं और माचिस की संख्या के आधार पर उनके साइज की तुलना करें। इससे उन्हें यह समझने में मदद मिलेगी, कि किसी ढांचे का साइज सिर्फ ऊंचाई के आधार पर ही नहीं नापा जाता। छः माचिसों के उपयोग से निम्नांकित ढांचे बनाए जा सकते हैं। (चित्र 33)।



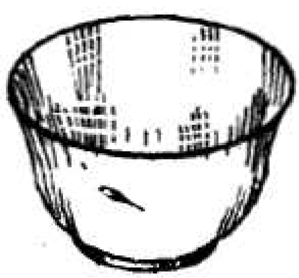
E19) कार्डबोर्ड के खोके, खाली माचिसें, पत्थर, लोहे के टुकड़े, मग, जार वगैरह चीज़ों का उपयोग आयतन सिखाने के लिए किया जा सकता है।

E20) एक बर्तन में पानी भरकर उसे दूसरे में उड़ेलना या एक खोके में रेत भरकर दूसरे में उड़ेलना जैसी क्रियाएं कक्षा 6 के बच्चों को मजेदार गतिविधियां लगेंगी और इनसे बच्चों को यह भी देखने में मदद मिलेगी कि बड़े बर्तन में ज्यादा चीज भरी जा सकती है।

E21) दी गई परिस्थिति से पता चलता है कि बच्चों में आयतन और धारिता को लेकर क्या–क्या गलतफहमियां होती हैं। विकल्प 1) और 2) सही हैं।

E22) सबसे पहला कदम तो यह दिखाना होगा कि बर्तन का आकार चाहे जैसा हो, उसमें समानेवाले तरल पदार्थ की मात्रा/आयतन वही रहता है। अवलोकन द्वारा या एक बर्तन का पदार्थ दूसरे में डालकर धारिताओं की तुलना करना अगला कदम है। इसके बाद नम्बर आता है मानक इकाई के रूप में धारिता नापने का।

धारिता का मतलब है कि कोई पात्र कितना धारण कर सकता है या उसमें कितना समा सकता है। आयतन का मतलब है कि उस वस्तु में पदार्थ कितना है। लोहे के एक कटोरे की धारिता पानी का वह नाप है जो कटोरे को भरने में लगेगा और कटोरे का आयतन है उसे बनाने में लगे लोहे की मात्रा (चित्र 34)।



चित्र 34

पाठ–14

E1) बच्चों की पहली भाषा, भाषा की क्षमता और माता–पिता की शिक्षा के स्तर में फर्क हो सकता है। इनके अलावा आप कई और ऐसे फर्क लिख सकते हैं।

E2) बच्चे कितना जानते हैं इसका अन्दाज लगाने की कोई कोशिश नहीं हुई। क्या उनको "स्थान" और "स्थानीय मान" की समझ थी ? क्या वे 3 अंकों की संख्याएं लिख सके ? क्या वे 100 से कम संख्याओं को लिख पाए ? बड़ी संख्याएं (यानि 3 या ज्यादा अंकों वाली) कोई भी ठोस चीज़ों से नहीं सिखा सकता। क्या बच्चे औपचारिक तरीके के लिए तैयार थे ? इस अभ्यास में दी गई स्थिति पर चर्चा करने के दौरान, इन जैसे बहुत सारे अन्य प्रश्नों पर विचार करना जरूरी है।

E3) (क) इस विषय पर हमने में चर्चा की है।

(ख) आपको यह देखना होगा की इनसे बच्चों की परिकल्पना बनाने की, उसका परीक्षण करने की, जरूरत पड़ने पर परिकल्पना बदलने की, अपनी अवलोकनों से व्यापकीकरण करने की कोशिश की क्षमता कैसे बेहतर हुई।

E4) उसे शुरू में, ठोस चीज़ों व छोटी संख्याओं से यह देखने के लिए बढ़ावा दिया जाए कि गुणा करना वास्तव में जोड़ने की प्रक्रिया को ही बार–बार दोहराना है। एक बार यह वह समझ जाए तो उसे पता चलेगा कि 2 X 89, वास्तव में 2 X 88 + 2 ही है।

E5) मान लीजिए आप कक्षा को पांच–पांच के समूहों में बांट लेते हैं। फिर आप कुछ चीज़ों को (जैसे टहनियों, या कंकड़ों, या बटनों को) किसी तरह क्रमवार रख सकते हैं, और हर समूह से पैटर्न ढूंढने व आपके जमाए पैटर्न को आगे बढ़ाने को कहा जा सकता है।

यदि बच्चों की चित्रों से काम करने की समझ है, तो आप विभिन्न समूहों को चित्रों के कार्ड बांट सकते हैं। इनसे पैटर्न बनाने या एक समूह द्वारा शुरू किए गए पैटर्न को दूसरे समूह द्वारा जारी रखने को कहा जा सकता है, इत्यादि।

यदि आप बच्चों को गुणा (या भाग) पढ़ा रहे हैं, तो आप बोर्ड पर अन्दाज लगाने के ऐसे खेल विकसित कर सकते हैं जिनसे वे सभी साथ – साथ गुणा और जोड़ (या भाग और घटा) के बीच के संबंध को पहचान सकें।

E6) उदाहरण के लिए, बच्चे लम्बाई और क्षेत्रफल नापना कैसे सीखते हैं। आप जब पढ़ेंगे, तो आप देखेंगे कि एक बच्चे को पहले लम्बाई माप से संबंधित ठोस अनुभवों की जरूरत होगी। धीरे–धीरे उसे मानक इकाइयों की जरूरत महसूस होगी, और फिर लम्बाई की अमूर्त अवधारणा को समझने लगेगी। फिर, आगे बढ़कर, क्षेत्रफल नापने के दौरान, आपको फिर से उसे ठोस अनुभव देने होंगे, खास तौर से यह दिखाने के लिए कि क्षेत्रफल नापने के लिए अलग तरह की इकाई की जरूरत क्यों होती है। इसी

तरह, चीज़ों के आयतन के विषय में सीखते हुए, उसे दोबारा अपनी लम्बाई और क्षेत्रफल की समझ को याद करना पड़ेगा।

E7) साफ है कि बच्ची ने मशीनी तरीके से एक ऐल्गोरिद्म को करने की कोशिश की थी जो शिक्षक ने उसके दिमा़ग में ठूँसा था। क्योंकि उसे यह नहीं मालूम था कि नियम कैसे काम करता है, उसे नियम याद रखना मुश्किल लगा। इसलिए उसने वह किया जो उसे सही लगा– अंश, अंशों का जोड़ है, हर, हरों का जोड़।

E8) हमारे अनुसार उन कारणों की वजह से जिन्हें हमने E9 के पहले के पाठ में बताए हैं, सीखने के ठोस अनुभवों का एक हिस्सा होना चाहिए ठीक तरह से बनाये गये इबारती सवाल।

E9) बच्चे विभिन्न दो–आयामी आकारों से संबंधित गाने गा सकते हैं। वे जब किसी आकार का नाम लेंगे, जैसे वृत्त, वे एक दूसरे के हाथ पकड़कर एक वृत्त बना सकते हैं। आगे, यदि वे एक त्रिभुज के बारे में गाएं, तो वे एक त्रिभुज का आकार बनाएंगे, इत्यादि। यह सब लय में किया जा सकता है।

E10) कक्षा एक के बच्चों से स्कूल आते समय खूब सारे कंकड़ (या पत्ते, या इंडियां) उठा कर लाने को कहा जा सकता है। फिर उनसे इन चीज़ों को इस प्रकार समूहों में रखने को कहा जा सकता है। जिससे हर समूह में उतने ही कंकड़/पत्ते/इंडिया हों जितनी कि एक हाथ की उंगलियां हैं। ऐसा लगता है कि बहुत छोटे बच्चे जानते हैं कि "पांच" का अर्थ एक हाथ की उंगलियों की संख्या होता है। इस तरह की मेल बिठाने की गतिविधि से वे पांच के समूह बना सकते है। यह गतिविधि विविध प्रकार की चीज़ों के साथ की जा सकती है।

ज्य़ादा बड़े बच्चे गिनकर दस–दस समूह बना सकते हैं। उन्हें हर समूह पर एक झण्डी लगाने के लिए रंगीन काग़ज दिया जा सकता है। और बच्चे ऐसे खेल खेल सकते हैं जिनमें बंडलों का इस्तेमाल स्थानीय मान की अवधारणा या 10 की गुणा सिखाने के लिए किया जा सकता है।

E11) संबंधित चर्चा के लिए आप खंड 5 देख सकते हैं।

E12) यह उनकी खुद सोचने की क्षमता, बिना किसी बड़े के सहारे की जरूरत के, विकसित करने में मदद दे सकता है। यह उनके आलोचनात्मक तरीके से सोचने की क्षमता के विकास के लिए भी जरूरी है।

बच्चे बपने आपसी मेल–जोल से यह भी देख सकते हैं कि वे एक दूसरे की तुलना में कहां बैठते हैं।

आप E17 करने के बाद और बातें जोड़ सकते हैं।

E13) ऐसा लगता है कि बच्ची उन औपचरिक संकेतों को समझ नहीं पाई हे जिनका इस्तेमाल हुआ है। शायद वह यह भी नहीं समझती है कि 3 को 9/2 से कैसे भाग दें। इस स्थिति को सुधारने के लिए, बच्ची को एक भिन्न से दूसरी भिन्न को भाग देने की प्रक्रिया समझाना होगा। इसके लिए शायद बच्ची की फिर ठोस अनुभव देने होंगे। इस पर विस्तृत चर्चा के लिए खंड 4 देखें।

पाठ–15

E1) मेरे गणित शिक्षक शायद रटना, बगैर ठोस अनुभवों के अमूर्त अवधारणाएं सिखाना, बच्चों को आंख मूंदकर सूत्रों का उपयोग करने देना आदि बातें लिखेंगे, जो सब सीखने में बाधा डालती हैं।

E2) इनमें से हर बात अच्छी योजना बनाने के फायदे हैं।

E3) इससे बच्चों के सीखने के अनुभवों को व्यवस्थित करने में, सीखने–सिखाने की प्रक्रिया का लगातर मूल्यांकरन करने में औ कई अन्य पहलुओं में मदद मिलती है। इनकी सूची आप बना सकते हैं।

E4) अव्वल तो पाठ्य पुस्तक पर आधारित तरीका निजी अंतरों की परवाह नहीं कर सकता। इसमें बच्चों को यह गुजाइश नहीं मिलती कि वे समस्या सुलझाने के अपने तरीके बना आधारित तरीका गणित शिक्षण के लिए लिहाज़ से ठीक नहीं है।

E5) अपने अनुभवों के उदाहरण दें।

E6) जैसे कि आप यह कैसे तय करेंगे कि बच्चे पहले से कितना जानते हैं ? और दूसरे, सवाल का जवाब देते हुए आप किन वास्ताविकताओं का ख्याल रखेंगे ? जिन विषयों को आप पढ़ाएंगे, उनकी सूची बनाइए, उनका क्रम तय कीजिए यह बताइए कि हर विषय को कितना समय देंगे।

E7) योजना बनाते वक्त आपको यह ध्यान रखना होगा कि किसी विषय को समझने से पहले क्या–क्या सीखना चाहिए, और क्या बच्चे पहले से जानते हैं। मोटे तौर पर मेरी एक योजना निम्नलिखित होगी :

- ठोस चीज़ों, खेलों व अन्य गतिविधियों के जरियें जोड़ सिखाना,
- बच्चों को संबंधित इबारती सवाल देना,
- बच्चों को संबंधित औपचारिक भाषा व प्रतीकों की ओर बढ़ने में मदद देना,
- इस बात का मूल्यांकन करना कि इकाई के अंत तक बच्चे कितना सीख चुके हैं।

हर चरण पर सिखाने के तरीके को कारगरता के मूल्यांकन के लिए समय देना होगा।

E8) मिसाल क तौर पर मैं शिक्षण साधन कैसे बनाऊं ? सोचकर औश्र बिन्दु लिखिए जिन्हें आप ध्यान में रखेंगे।

E9) उदाहरण के लिए,

- क्या कक्षा के सारे बच्चे गतिविधि में जुटे हैं ?
- क्या बच्चों को खुद अपने तरीकों को इस्तेमाल करने के लिए बढ़ावा मिल रहा है ? ऐसे और सवाल सोचिए जिनसे आपको अपने सिखाने के तरीके के मूल्यांकन में मदद मिलेगी।

E10) उदाहरण के लिए,

- क्या मैं उन्हें काफी अलग–अलग तरह के उदाहरण, अनुभव और गतिविधियों दे पा रही/रहा हूं ?

ऐसे और कौन से प्रश्न हो सकते हैं ?

E11) इकाई के शुरू में, यह पता लगाने के लिए कि वह कितना जानती है।

इसके बाद जब उसे दिन, रात, समय अंतराल का अहसास देंगे, तब हर चरण पर। यह मूल्यांकन मौख्यिक और लिखित, दोनों तरह से किया जा सकता है। जो कुछ उसने समझा है, उसे व्यक्त करने के लिए उसे बढ़ावा दें। इसके बाद, उसके संदर्भ और स्तर को ध्यान में रखते हुए उसे मौखिक इबारती सवाल दिए जा सकते हैं। समय व उसके मापन की ज्यादा औपचारिक अवधारणा की ओर बढ़ते भी यही प्रक्रिया जारी रहना चाहिए।