# जड़ में है : गिनती

**पाठ – 4** **गिनना कैसे सिखायें**

गिनती का मतलब – अनुभव से अवधारणा तक गिनती।

**पाठ – 5** **इकाई, दहाई और आगे ....**

बुनियादी समझ – संक्रियाएँ लगाने में दिक्कतें – स्थानीय मान क्या है?

गिनती–गिणत–गणित! सारा गणित का महल गिनती पर खड़ा होता है। पुराने, दिनों में टीचर बोर्ड पर लिख देता था– 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, फिर बेंत 1 पर रखकर बोलता था ''एक'' और पूरी क्लास चिल्लाती थी ''एक'' – जो न चिल्लाये उस पर सटाक! फिर आगे 2 पर जाकर बोलता था ''दो'' – और यह सिलसिला 10 तक जाता था। दो महीने के अन्त में पूरी क्लास 1, 2, 3 ... लिख लेती थी और बोल भी लेती थी एक, दो, तीन, ...। बस, हो गया। गिनती सीख ली गयी। माँ, बाप भी खुश।

लेकिन पुराने दिन से अच्छा गणित नहीं निकला था – निकले थे गणित के तोते। तोते अच्छे लगते हैं मगर अफसोस, समाज का काम उनसे नहीं चलता।

तो अब क्या होता है? शिक्षाविदों ने बहुत मेहनत की है। टीचरों को बेहतर पढ़ाया जाने लगा है। कहा गया है गणित का शिक्षा बच्चों के आसपास के जीवन से जुड़ी होनी चाहिए गतिविधियों से ''अवधारणाएँ'' सिखायी जानी चाहिए, बच्चों को पाठों से आनन्द आना चाहिए।

चलो, ठीक है। मगर कैसे? अमूर्त लकीरें जैसे 1, 2, 3 .... न लिखकर बच्चों को एक किताब, एक माचिस की तीली, एक कंकर, एक डिब्बा सामने रखकर, सब पर बारी–बारी से उंगली रखकर कहा जाना चाहिए। एक, एक, एक, ...। फिर दो–दो किताबें, माचिस की तीलियाँ, कंकर आदि सामने रखकर वैसे ही कहना चाहिए दो, दो, दो ...। ऐसे ही फिर तीन, चार, आदि। उम्मीद है, इस तरह बच्चे '2' की तस्वीर से 'दो' की आवाज़ जोड़ लेंगे और इनको वो चीज़ों के साथ। ठीक है। ऐसा होता भी है– करके देखा गया है।

क्या बच्चों के जीवन से जुड़ी गिनती सिखायी जा रही है? सोचो, अगर माचिस की तीलियों, कंकरों की जगह चॉकलेट, टाफियों, मिठाइयों का इस्तेमाल किया जाए तो क्या बच्चों के जीवन से जुड़ाव बेहतर होगा, या नहीं? ठीक समझने पर बच्चा इनको खा सके।

स्कूलों में खर्चा बढ़ जाएगा। बच्चों का पेट खराब होगा। शिक्षाविद डाँटेंगे, कहेंगे गणित की जगह लालच सिखाया जा रहा है। ये आरोप शायद सही है, मगर बेशक बच्चे गिनती बेहतर सीखेंगे।

ये पूरा किस्सा शायद आधा– मज़ाक है। असली बात है कि ''जीवन से जुड़ना'' भी किताबी तरह से होगा तो फिर वही पुराने, बेबाक, दिन लौटा आएँगे...

यही बात लागू होती है बड़े अंकों की गिनती पर। इकाई, दहाई, सैंकड़ा, ... इन सबकी अवधारणा वास्तविक जीवन से उपजा है, किसी गणित शास्त्री के दिमाग से नहीं। यह भी ज़रूरी नहीं कि दस के पैमाने (दशमलव) पर ही गिनती की जाये – दो, चार, आठ, बीस ... किसी भी पैमाने पर की जा सकती है। पूरा कम्प्यूटरों का जगत सिर्फ दो अंकों (0 और 1) पैमाने पर बनाया गया है। पुराने जमाने में व्यापार बैलगाड़ियों पर किया जाता था। मंडियों में हिसाब कैसे होता था? अनाज के एक बोरे का नाप उतना होता था जितना एक हम्माली/खटीक अपनी पीठ पर ढो सके। एक बैलगाड़ी का नाप उतना होता था जितना दो बैल चला सकें। सड़कों के पड़ाव (और उनसे जुड़े गोदाम) उतनी दूर होते थे जितना कि बैल एक दिन में चल सकें (16 कोस)। इन ''वास्तविक जीवन'' की ज़रूरतों से उपजा था। गणित। व्यापारी गिनते थे– इतने गोदाम, इतनी बैलगाड़ियाँ, इतने बोरे। यहीं से आये।

इकाई, दहाई, सैंकड़ा... आदि के आइडिये! और बच्चों को इकाई, दहाई, सैंकड़ा आदि की समझ उनके ''जीवन से जुड़ी'' चीज़ों के इस्तेमाल से की जाएँ तो बेहतर है। हाँ, टाफी, चाकलेटों से नहीं! सिर्फ शिक्षाविद ही नहीं, हर कोई इन पर एतराज़ करेगा।

हाँ, और विषयों की तरह गणित की भी अपनी भाषा है। अ, ब, ज, ल, प की जगह 1, 2, 3, 4, ... आदि अक्षर हैं। हर अक्षर की अलग जगह होती है। कमल और कलम में फर्क है – जैसे 123 और 132 में। गणित का भी अपना व्याकरण है। इसको भी उसी तरह की संजीदगी, और मज़े से सीखना–सिखाना है।

## पाठ–4

# गिनना कैसे सिखायें

# गिनती का मतलब – अनुभव से अवधारणा तक गिनती

## परिचय

तीन साल के बच्चों को गणित का पहला अनुभव क्या दिया जाए, इस पर विचार करते समय हममें से ज्यादातर लोग यही सोचते हैं कि उन्हें 1 से 20 तक की गिनती याद कराई जाए। हम उन्हें यह भी सिखाते हैं कि उंगलियों से 10 तक की संख्याएं कैसे दिखाएं। इसके बाद चाहते हैं कि बच्चे जल्द से जल्द संख्याएं लिखने लगें, और उन्हें पहचानने लगें (हम इस बात की कोई चिन्ता नहीं करते कि बच्चे पहले लिखना सीखें या पहले पहचानना या वे दोनों काम साथ–साथ करें!)

बच्ची जब 'एक से बीस' तक की गिनती याद कर लेती है तो हम रिश्तेदारों–दोस्तों के सामने इसका प्रदर्शन करवाते हैं, और हम गर्व से बैठ कर सुनते हैं। लेकिन क्या आपने कभी इस बात पर गौर किया है कि जब 'प्रदर्शन' के दौरान उसे यह याद नहीं आता कि छः के बाद क्या आएगा, तो वह कितनी घबराई नजर से आपकी ओर ताकती है ? और जब वह अंदाजे से –सात– फुसफुसाती है और देखती है कि आप सिर हिलाकर हामी भर रहे हैं, तो उसे कितनी राहत मिलती है? आपके लिए तो यह आपकी बिटिया का एक और सफल प्रदर्शन था, जबकि बच्ची के लिए यह एक और अग्नि परीक्षा थी।

इस तोता रटन्त, नीरस और कवायदनुमा तरीके से 'गिनती सिखाने' के बाद हम इसी ढंग से जोड़ना, घटाना, गुणा, भाग और आगे चलकर भिन्न व दशमलव भी सिखाते हैं। इस तरह जब हम सीखने की प्रक्रिया में से मजा निकाल देते हैं, तो कोई हैरानी की बात नहीं कि बच्चे गणित से डरने लगें उसे कठिन समझे और इन्तजार करें कि कब गणित की कक्षा खत्म हो। जब गणित रोजमर्रा के जीवन से कटा हुआ हो और इस कदर बेमजा व उबाऊ हो, तो शायद बच्चे कुछ इस तरह सोचते होंगेः

मम्मी फिर आ गई। रेत में खेलने में इतना मजा आ रहा है, और मम्मी कहती है कि कॉपी में चित्र बनाओ। वह इनको 'संख्या' कहती है। .................... चित्र बनाना तो ठीक है, पर वे कहती हैं कि एक ही चित्र बार–बार, बार–बार, पूरे पन्ने पर बनाओ। और अगर मैं चित्र को थोड़ा बदल दूँ, तो गुस्सा हो जाती हैं। . ...........काश, आज मौसी न आएं। जब मम्मी कहती हैं कि मौसी को '1 से 20 सुनाओ' तो बोरियत होती है। मैं 'पाँच' के पहले 'सात' या 'एक' के पहले 'दो', बोल दूँ तो क्या हो जाएगा ? .......... ज्यादा मजा तो रेत में खेलने में आता है। पर मम्मी कहती है उसमें वक्त बर्बाद होता है। ......... लो, वो फिर बुला रही है। जल्दी  नहीं जाऊं, नही ंतो एक के बजाय दो पन्ने लिखने को कहेंगी।''

चित्र 1 : क्या मिनी गिन सकती है?

आपने अगर कभी सोचा है कि बच्चों को गिनती सीखने में इतनी दिक्कत क्यों होती है और इस काम में उनकी मदद कैसे करें, तो इस पाठ को पढ़ने से आपको मदद मिल सकती है।

### गिनती करने का मतलब

'गिनती कर पाने की क्षमता' से हम क्या समझते हैं ? इसका जवाब देने से पहले जरा निम्नलिखित स्थिति पर विचार कीजिए।

**उदाहरण 1:** तीन वर्षीय मिनी 1 से 20 तक गिनती सही क्रम में बोल सकती थी। एक बार उसकी दादी ने उससे दराज में से 12 बटन लाने को कहा। मिनी ने बटन उठाते हुए 12 तक 'गिना' और बटन दादी को दे दिए। कुल सात बटन थे। दादी ने मिनी से कहा कि फिर से गिनकर देख ले कि 12 बटन हैं या नहीं। मिनी ने फिर से 'गिना' और कहा, ''नहीं, ये तो पन्द्रह बटन हैं।''

(i) आपका क्या ख्याल है, मिनी गिनना जानती है या नहीं ? (ध्यान रखें कि वह 1 से 20 तक की संख्याएं सही क्रम में बोल सकती है।)

(ii) आपके ख्याल से मिनी 12 बटन क्यों नहीं उठा पाई ?

इन सवालों पर गौर करने के बाद, अपने घर या पड़ोस के किसी चार वर्षीय बच्चे के साथ निम्नलिखित गतिविधि आजमाइये।

E1) किसी ऐसे चार वर्षीय बच्चे के सामने दस कंकड़ रखिए जो दस तक की संख्याएँ सही क्रम में बोल सकता/सकती हो। अब उससे कहिए कि वह उन कंकड़ों को अपनी उंगली से छूते हुए जोर से गिने। शायद उसे दिखाकर समझाना पड़े कि आप क्या चाहते हैं। लेकिन एक बार वह गिनना शुरू कर दे, तो बीच में टोकिए मत। बस ध्यान से देखिए और निम्नलिखित सवालों के संदर्भ में अपने अवलोकन दर्ज कीजिए।

क) क्या बच्चे ने कुछ कंकड़ों को एक से ज्यादा बार गिना ?

ख) क्या उसने कुछ कंकड़ छोड़ दिए ?

ग) क्या उसने बगैर किसी कंकड़ को छुए भी संख्या बोली ?

घ) क्या सारे कंकड़ छू लेने के बाद भी वह संख्याएँ बोलता रहा/बोलती रही ?

अपने अवलोकनों के आधार पर आप बच्चे की गिनने की क्षमता के बारे में क्या निष्कर्ष निकाल सकते हैं ।

यदि अभ्यास E1 के **सारे** सवालों के उत्तर 'नहीं' हैं, तो सम्भावना है कि बच्चे को दस तक गिनना आता है। यदि **किसी एक** प्रश्न का उत्तर भी 'हां' है, तो इसका मतलब यह होगा कि बच्चे को गिनना नहीं आता। E1 से जाहिर होता है कि संख्याओं के नाम बोलने से सिर्फ इतना ही पता चलता है कि बच्चे की याद्दाश्त अच्छी है। दूसरी ओर, गिन पाने की क्षमता से पता चलता है कि बच्ची संख्या की अवधारणा समझने की ओर बढ़ रही है।

उदाहरण 1 में हालांकि मिनी सही क्रम में संख्याओं के नाम बोल सकती है, मगर गिनना उसे नहीं आता। गिनती करते समय वह निम्नलिखित में कोई एक या अधिक गलतियाँ कर रही है – एक ही बटन को एक से ज्यादा बार गिनना, गिनते वक्त किसी–किसी बटन को छोड़ देना, किसी बटन को छुए बगैर संख्या बोल देना या सारे बटन पूरे हो जाने बाद भी संख्याएं बोलते रहना। वह ऐसी गलतियाँ क्यों करती है ? इसे समझने के लिए हमें यह देखना होगा कि गिनते वक्त हम किन–किन प्रक्रियाओं से गुजरते हैं। यह देखने का सबसे अच्छा तरीका होगा कि आप खुद मोतियों के एक ढेर में मोतियों को गिने। हां, क्यों नहीं ? यह करके देखें, और करते हुए सोचें कि आपने क्या किया।

***"संख्याओं को क्रम से बोल पाना और गिनने की क्षमता एक ही बात नहीं है।"***

इस गतिविधि से निकले मेरे अवलोकन मैंने नीचे दिये हैं। आपके अवलोकन से ये कितने मिलते–जुलते हैं?

i) सबसे पहले तो मैंने मोतियों को एक पंक्ति में जमा दिया ताकि गिनते वक्त न तो कोई छूटे और न दो बार गिना जाए। दूसरे शब्दों में मैनें उन्हें एक **क्रम में रखा।**

ii) अब इनको गिनने के लिए मैंने मान्य क्रम में संख्याओं के नाम बोलना शुरू किया। मेरे लिए ऐसा करना सम्भव था क्योंकि मुझे इस क्रम के अनुसार काफी संख्याएँ मालूम हैं, कम से कम गिनी जाने वाली मोतियों जितनी। गिनते वक्त मैंने हर संख्या का नाम बोलते हुए एक मोती को (वास्तव में या ख्यालों में) छुआ, और इस तरह हर मोती को छुआ। यानी मैंने एक मोती को एक संख्या के साथ **जोड़ा।** दूसरे शब्दों में, मैनें **एक–एक की संगति** बनाई।

iii) गिनती के हर कदम पर मैंने मोतियों का दो समूहों में वर्गीकरण (classification) किया – वे मोती जो गिने जा चुके थे और वे मोती जिन्हें गिनना बाकी था।

iv) जब मैनें दसवें मोती को छुआ (कुल दस मोती ही थे), तो मैंने बोला 'दस' । पल भर बाद मैंने बता दिया कि मेरे पास दस मोती हैं। यानी 'दस' शब्द का इस्तेमाल दो तरह से हो रहा था। आखिरी मोती को छूते हुए जब मैंने 'दस' बोला था तब वह सिर्फ **उसी मोती** से जुड़ा था। मगर बाद में वही शब्द 'दस' **सारे** मोतियों की कुल संख्या बता रहा था।

यानी मोतियों को गिनने के दौरान **चार अलग–अलग प्रक्रियाओं** से गुजरना पड़ा – क्रम में रखना, वर्गीकरण करना, एक–एक की संगति बनाना और एक ही संख्या को दो अलग–अलग अर्थों में इस्तेमाल करना।

किन्तु जब हम बच्चों को गिनती से परिचित कराना शुरू करते हैं, तो कहां से शुरू करते हैं? हम यह तक पता करने की कोशिश नहीं करते कि क्या बच्चे को चीजें छांटना या क्रम में रखना आता है या नहीं। और, जहाँ तक एक –एक की संगति का सवाल है, तो हम बस एक–दो बार उसे बता देते हैं कि गिनते वक्त हर एक चीज को एक ही बार छुआ जाता है। हम उसे इतना समय ही नहीं देते कि वह समझ पाए कि इसका मतलब क्या है या इसका अभ्यास कर पाए। कई बार जब किसी बच्चे को गलत गिनने के लिए डांट पड़ती है तो कोई हैरानी नहीं होनी चाहिए कि वह रानी के तरह यह जवाब दे :

''लेकिन गलत क्या है ? आपने मुझसे 'एक, दो, तीन, ..............' बोलने को कहा और साथ–साथ इन चीजों को छूने को कहा। इससे क्या फर्क प़ड़ता है कि इन्हें छूते हुए मैं 20 तक बोल सकती हूँ जबकि आप सिर्फ 15 तक बोल पाते हैं।''

ऊपर बताई गई चार प्रक्रियाओं में से आखिरी प्रक्रिया बच्चों के लिए सबसे मुश्किल होती हैं। इस संदर्भ में निम्नलिखित स्थिति कई बार देखने में आती है।

**उदाहरण 2:** एक व्यक्ति ने अपनी बच्ची को चार पेंसिलें दिखाई। फिर उन्हें बच्ची के सामने एक लाइन में रख दिया। अब पहली पेंसिल की ओर इशारा करके बोला 'एक', दूसरी की ओर इशारा करके बोला 'दो', तीसरी की ओर इशारा करके 'तीन' तथा चौथी की ओर इशारा करके बोला 'चार'। उसने एक बार इसे दोहराया ताकि बच्ची भलीभांति समझ जाए। इसके बाद उसने मुस्कुराते हुए बच्ची से कहा 'मुझे दो पेन्सिलें दे दो'। बच्ची ने पंक्ति में से दूसरी पेंसिल उठाकर दे दी। इस पर पिता ने कहा कि ''नहीं बिटिया, मैनें कहा **दो** पेंसिलें। (एक और पेंसिल उठाते हुए) यह देखो, अब ये दो पेंसिलें हैं।'' यह सुनकर बच्ची चक्कर **में पड़ गई। ''सचमुच ?'', बच्ची ने सोचा,** ''लेकिन पहले तो उन्होंने कहा था कि यह पेंसिल **'दो'** हैं ?''

[?] आपको क्या लगता है, ऊपर वाले उदाहरण में बच्ची चक्कर में क्यों पड़ गई?

जब हम संख्याओं के नाम और वस्तुओं के बीच एक–एक की संगति जमाते हैं, तब हम संख्या को वस्तु के अस्थायी लेबल के रूप में इस्तेमाल करते हैं। ऊपर दिए गए उदाहरण में उस पेंसिल और संख्या 'दो' के बीच कुछ भी समान (common) नहीं है। वह पेंसिल वस्तुओं के क्रम में दूसरी है, बस। मगर जब हम बच्चे से दो पेंसिलें देने को कहते हैं तो हमारी अपेक्षा यह होती है कि वह 'दो' के लेबल को दूसरी पेंसिल से अलग कर दे और उसे किन्हीं भी दो पेंसिलों से जोड़कर देखें। यानि कि संख्या के नाम का इस्तेमाल दो तरह से

हो रहा है। जो बच्चे अभी संख्याओं से निपटना सीख ही रहे हैं, उनके लिए यह बात समझना आसान नहीं हैं। इस समस्या को कैसे सुलझाएँ? इस सवाल का जवाब हम ''गिनती से परिचय'' भाग में देंगे।

E2) नीचे लिखे कथनों में से कौन–कौन से सही हैं? गलत वाक्यों में उचित परिवर्तन करके उन्हें सही बनाइए।

i) यदि कोई बच्ची गिन नहीं सकती, तो वह संख्याओं के नामों को एक क्रम में बोल ही नहीं सकेगी।

ii) यदि कोई बच्ची गिन नहीं सकती, तो सम्भव है कि वह यह नहीं समझ पाई है कि दी गई वस्तुओं और संख्याओं के नामों की जोड़ी कैसे बनाई जाए।

iii) जब कोई बच्ची पांच चीजों की संख्याओं के नामों के साथ सही जोड़ी बना ले, तो इसका मतलब यह है कि वह 'पांच' शब्द का उपयोग दोनों अर्थों में कर सकती है।

iv) गिनना सीखने से पहले किसी भी बच्चे को वर्गीकरण, क्रम में रखने तथा एक–एक संगति की कुछ समझ होना जरूरी है।

गिनने की प्रक्रिया में शामिल प्रक्रियाओं पर चर्चा करना हमें इसलिए जरूरी लगा क्योंकि बदकिस्मती से, कई ऐसे स्कूल हैं जो सिर्फ संख्याओं के नाम याद कराने पर जोर देते हैं। इनमें से ज्यादातर का विश्वास है कि यदि बच्चे संख्याओं के नाम गिनती के क्रम में बोलना सीख जाएं, तो इसका मतलब यह है कि वे गिनना सीख गए हैं। आप अब तक शायद इससे सहमत होंगे कि यह धारणा गलत है और बच्चों में संख्या की समझ धीरे–धीरे ही विकसित होती है। गिनती सीखने से पहले उन्हें वर्गों में बांटना, क्रम में रखना और एक–एक की संगति जमाना कुछ हद तक आना चाहिए। इसीलिए इन क्षमताओं को **संख्या–पूर्व अवधारणाएं** (pre-number concepts) कहा जाता है। यानी संख्या का अर्थ समझने से **पहले** बच्चों को ये क्षमताएं विकसित करनी होगी। देखते हैं कि ये अवधारणाएं विकसित करने में हम बच्चों की क्या मदद कर सकते हैं।

## संख्या–पूर्व अवधारणाओं का विकास

आप जानते ही हैं कि किसी अवधारणा पर पकड़ बनाने के लिए बच्चों को उसे टटोलने व उसका अनुभव करने के कई अवसर मिलने चाहिए। **उन्हें प्रोत्साहित किया जाना चाहिए कि, किसी अवधारणा को टटोलते हुए वे जो कुछ करते हैं, उसके बारे में बातचीत करें।** और इस सबके लिए हमें धीरज रखने की जरूरत है। हममें से कुछ लोग पहले तो बच्चों को खुद जवाब खोजने के लिए प्रेरित करते हैं। मगर जब उन्हें समय लगता है, तो हमारा धीरज टूट जाता है और हम खुद ही उन्हें जवाब दे देते हैं या जल्दी से खुद कार्य को निपटा देते हैं। इससे बच्चे खुद तर्क करने व जवाब खोज निकालने से रह जाते हैं। वास्तव में हमें सवाल को परिभाषित करने में तथा अलग–अलग सम्भव जवाबों को खोजने में उनकी मदद करनी चाहिए। इसके लिए उन्हें काफी समय देना होगा। इसी तरह वे गणितीय अवधारणाओं की समझ और गणितीय ढंग से सोचने की क्षमता विकसित कर पायेंगे।

***"बच्चे को सवाल को समझने और हल करने के लिए काफी वक्त दें।"***

बच्चे में वर्गीकरण करने, क्रम जमाने व जोड़ी बनाने की क्षमता विकसित करने के लिए बच्चों को मजेदार गतिविधियों द्वारा अवधारणाओं को खोजने का मौका दिया जा सकता है। यहाँ हम कई गतिविधियों पर गौर करेंगे। **सिर्फ बतौर उदाहरण है।** इन्हें आसानी से पाई जाने वाली सामग्री के अनुसार अपनी विशिष्ट परिस्थिति के अनुरूप ढालकर इस्तेमाल करें।

## वर्गीकरण

जैसा कि आप जानते हैं, ऐसी चीजों को जिनमें कुछ गुण एक–से हों, **साथ–साथ रखने को ही वर्गीकरण या समूहीकरण कहते हैं।** किसी बच्चे को वर्गीकरण करना आ गया है, यह तभी कहा जा सकता है जब वह वर्गीकरण की कसौटी का निर्णय कर सके और पूरी गतिविधि के दौरान इस कसौटी को बनाए रख सके। **यह क्षमता तार्किक व गणितीय अवधारणाओं के विकास की बुनियाद है।**

बच्चे रोजमर्रा के कामकाज में अक्सर वर्गीकरण करते हैं। मसलन जब बच्चों को कहा जाता है कि गुड़िया के कपड़े एक थैली में और गहने दूसरी थैली में रखे, या गंदे बर्तन एक जगह और साफ बर्तन दूसरी जगह रखें, या कटे हुए कागज के चौकोर और तिकोने टुकड़े को अलग–अलग करे, तो वह वर्गीकरण ही तो करते हैं। लेकिन वर्गीकरण की अवधारणा विकसित करने के लिए बच्चों को ऐसे और अनुभवों की जरूरत है। खेल इसका अच्छा माध्यम हो सकता है।

गतिविधियाँ बनाते समय ध्यान में रखी जाने वाली बातें–

i) बच्ची के लिए कोई भी कार्य आयोजित करते समय हमें यह पता होना चाहिए कि वह पहले से किन बातों से **परिचित** है और उसकी **क्षमताएँ** क्या हैं। यदि इन बातों पर ध्यान न रखा गया, तो हो सकता है कि बच्ची वह गतिविधि न कर पाए इसलिए हमें गतिविधियों को ऐसी चीजों व परिस्थितियों के इर्द–गिर्द बनाना होगा जिनसे वह घुली–मिली हो।

ii) बच्ची की क्षमताओं के बारे में कोई फैसला करने से पहले जरूरी है कि हम उसे अलग–अलग स्थितियों में देखें। हाल के शोधों से पता चला है कि **स्कूलपूर्व स्तर के बच्चे कई स्थितियों में वर्गीकरण कर पाते हैं,** बशर्ते कि वे परिस्थितियाँ उनके लिए सार्थक हों तथा उन्हें साफ–साफ समझ में आ जाए कि क्या करना है।

***"गतिविधि बच्चे के लिए सार्थक और दिलचस्प हो।"***

iii) हमें बच्चों को **प्रोत्साहित करना चाहिए कि किसी गतिविधि के दौरान वे जो भी करें, उसके बारे में बातचीत करें।** इससे हमें यह जानने में मदद मिलती है कि बच्चे वर्गीकरण की अवधारणा किस हद तक समझ पाए हैं। इसके जरिये उन्हें 'समान', 'असमान', 'समूह' का सदस्य' जैसी अवधारणाएं सीखने में भी मदद मिलेगी। ये अवधारणाएं वर्गीकरण की बुनियाद हैं। 'तुमने ऐसे समूह क्यों बनाए ?' या 'इन चीजों में क्या समानता है कि तुमने इन्हें साथ–साथ रखा है ?' जैसे सवालों से उन्हें अपने विचारों को स्पष्ट करने तथा समझ को बेहतर बनाने में मदद मिलती है।

**iv)** **शुरू की गतिविधियों** में वर्गीकरण **एक ही गुण** के आधार पर होना चाहिए। धीरे–धीरे, जब बच्चे इस स्तर पर वर्गीकरण करना सीख जाएं तो गतिविधि को ज्यादा पेचीदा बनाया जा सकता है। तब आप दो गुणों, मसलन रंग व आकार, या आकृति व रंग, के आधार पर समूह बनाने को कह सकते हैं। कई स्कूलपूर्व बच्चों को ऐसी गतिविधियाँ कठिन लगेंगी क्योंकि इनमें वर्गीकरण एक से ज्यादा तरीके से किया जा सकता है।

आइए, अब ऐसी कुछ गतिविधियों पर गौर करें जिनके जरिये स्कूलपूर्व बच्चों को वर्गीकरण की क्षमता विकसित करने में मदद मिल सकती है।

- शुरू में आप बच्चों को तरह–तरह की सामग्री खेलने के लिए दे सकते हैं। खेलते वक्त वे अपने आप उन चीजों को 'व्यस्थित करने' के तरीकों के बारे में सोचते हैं। हो सकता है कि उनके द्वारा किया गया 'वर्गीकरण' आपको मनमाना सा लगे पर चिन्ता की कोई बात नहीं।

महत्वपूर्ण बात यह है कि उन्हें अलग–अलग तरह की सामग्री उलटने–पलटने को मौका मिल रहा है और वे उन्हें किसी–न–किसी ढंग से 'व्यवस्थित' करने की कोशिश कर रहे हैं। इस चरण में बच्चे शायद किसी एक कसौटी के आधार पर भी वर्गीकरण न कर पाएं।

चित्र 2 : वर्गीकरण की गतिविधि

- अगले चरण में आप उन्हें **कुछ परिचित चीजें** देकर उन्हें एक गुण के आधार पर समूहों में बांटने को कह सकते हैं, जैसे आकृति या रंग या सतह की बनावट, वगैरह। यह अच्छी तरह से समझाएं कि करना क्या है – ''लाल रंग की सारी चीजों को एक साथ रखो।'' या ''इस छड़ी जैसी चीजों को एक साथ रखो।'' वगैरह। हो सकता है कि शुरू में आपको समूह बनाकर दिखाना भी पड़े कि गतिविधि कैसे करना है।
- बच्चों को तरह–तरह की पत्तियाँ/पत्थर/दालें/गेंदें देकर उन्हें समूहों में बांटने को कहा जा सकता है। समूह बनाने के लिए कसौटी स्वयं बच्चे तय करें, तथा जैसे चाहें समूह बनाएं। जब वे यह गतिविधि पूरी कर चुकें तो उनसे उनके द्वारा निर्धारित कसौटी के बारे में चर्चा करें। आप उनसे इस तरह के सवाल पूछ सकते हैं – ''इन्हें साथ–साथ क्यों रखा है ?'' या ''इसे यहां क्यों नहीं रख देते ?'', वगैरह।
- जब बच्चे खाना खा रहे हों तब आप उनसे पूछ सकते हैं कि कौन सी चीजें मीठी हैं, और कौन सी नमकीन।
- एक ज्यादा पेचीदा गतिविधि यह हो सकती है कि आप कुछ चीजों को किसी गुण के आधार पर समूहों में बांट दें। अब बच्चों से यह पता लगाने को कहिए कि आपने कौन सा गुण चुना था।

E3) ऐसी दो और गतिविधियाँ सुझाइए जिससे बच्चों में वर्गीकरण की क्षमता विकसित करने में मदद मिल सके।

आइए अब कुछ ऐसी गतिविधियों पर चर्चा करते हैं जिनका सम्बन्ध क्रम में रखने तथा अनुक्रम बनाने से है।

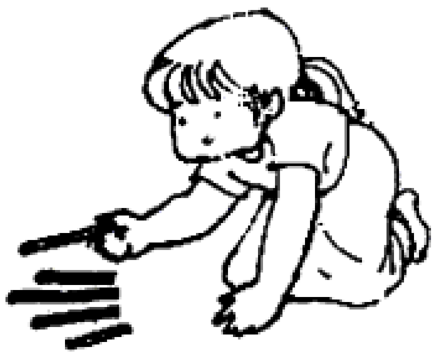
## अनुक्रम बनाना

(i) **चीजों को क्रम में जमाने का अर्थ होता है कि उन्हें किसी नियम के आधार पर क्रम से रखना।** यह जमावट आकृति, आकार, रंग या ऐसे ही किसी भी गुण के आधार पर की जा सकती है। मसलन लाल व हरी पत्तियों को आप एक लाल, एक हरी, एक लाल ................ के क्रम में जमा सकते हैं।

(ii) **अनुक्रम में रखना (Seriation)** क्रम जमाने का एक खास तरीका है। इसमें चीजों को किसी खास गुण (जैसे लम्बाई, आकार, वजन, वगैरह) के बढ़ते (या घटते) क्रम में रखा जाता है। उदाहरण के लिए, आप कुछ पत्थरों को वजन के आधार पर इस तरह अनुक्रम में रख सकते हैं कि सबसे भारी पत्थर सबसे पहले आए और फिर उससे कम वजन वाला, वगैरह, अन्त में सबसे हल्का पत्थर होगा।

बच्चों के लिए अनुक्रम सम्बन्धी गतिविधियाँ बनाते वक्त उनकी क्षमताओं को ध्यान में रखना होगा। जैसे, हो सकता है कि स्कूलपूर्व बच्चे तीन से ज्यादा चीजों को अनुक्रम में न रख पाएं। नीचे दिए गए उदाहरण से यही बात जाहिर होती है।

**उदाहरण 3 :** चार वर्षीय बच्ची को अलग–अलग लम्बाई की चार डंडियाँ देकर कहा गया कि उन्हें लम्बाई के अनुसार क्रम में रखे। उसने पहली डंडी को अपने करीब रखा। इसके बाद उसने अगली डंडी उठाई और उसे पहली की तुलना में रख दिया। अब तक तो सब ठीक चला। तीसरी डंडी रखते वक्त उसने पहली दो को देखा और तीसरी को भी सही जगह रख दिया। अब चौथी डंडी रखते वक्त उसने पूरी जमावट को देखने की बजाय सिर्फ तीसरी डंडी को देखा। इसलिए उसके द्वारा बनाई गई जमावट चित्र 3 की तरह थी।



चित्र 3 : तीन डंडियों के बाद यह बच्ची पूरे क्रम को न देखकर सिर्फ आखिरी डंडी को ही देखती है।

बच्ची तीन चीजों को अनुक्रम में रख सकती थी। लेकिन जब चौथी की बारी आई, तो इसका सम्बन्ध पहले की सारी डंडियों से नहीं जोड़ पाई। वह यह नहीं देख पाई कि यह दूसरी डंडी से लम्बी है लेकिन तीसरी से छोटी है; इसलिए इसे उन दोनों के बीच रखना होगा। तीसरी डंडी के बाद की हर डंडी को वह सिर्फ पिछली डंडी की तुलना में देखती है।

**उदाहरण 3** से यह भी उभरता है कि बच्चों को दिए जाने वाले हर काम में जिन तार्किक प्रक्रियाओं की जरूरत होती है, उसकी स्पष्ट समझ हमें होनी चाहिए। खास तौर से जब बच्ची से अनुक्रम बनाने की उम्मीद करें, तो हमें पहले यह पता कर लेना होगा कि क्या वह :

**i)** **दो दिशाओं में क्रम जमा सकती हैं ?** (मसलन, क्या वह एक साथ दो संबंध 'उससे बड़ा और उससे छोटा लागू कर सकती है ?)

ii) संक्रामकता (transitivity) के तर्क को समझ सकती है ? (यानी, अगर A, B, से बड़ा और B, C से बड़ा है, तो A, C से बड़ा होगा।

आइए अब कुछ ऐसी गतिविधियों को देखते हैं जिनका सम्बन्ध क्रम व अनुक्रम जमाने से है। यहाँ इन्हें कठिनाई के बढ़ते क्रम में दिया गया है।

- क्रम जमाने की सबसे आसान गतिविधि यह है कि बच्चों से किसी पैटर्न की नकल करने को कहा जाए। मसलन एक पंक्ति में एक चॉक, एक पेंसिल, एक चॉक, क्रम में चॉक (Chalk) व पेंसिल के ढेर से वैसी ही एक और पक्ति बनाएं।

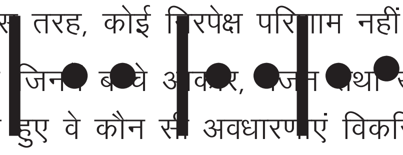
- इससे थोड़ी मुश्किल गतिविधि यह हो सकती है कि बच्चों को किसी पैटर्न को आगे बढ़ाने को कहा जाए। जैसे कि, एक टहनी और दो मोती रखें, और इस क्रम को दो–तीन बार दोहराएं। अब बच्चों से कहें कि इसी सिलसिले को आगे बढ़ाएं।

क्रम जमाने की गतिविधि में जिस प्रश्न का उत्तर खोजना होता है, वह है 'अगला क्या आएगा?'

- कठिनाई का अगला स्तर अनुक्रम जमाने का हो सकता है। बच्चों से कहा जा सकता है कि वे दी गई चीजों को किसी गुण के आधार पर अनुक्रम में जमाएं। शुरू में तीन चीजें दी जा सकती हैं, और आगे चलकर उन की संख्या बढ़ाई जा सकती है। शुरू में शायद कुछ प्रश्न पूछकर (जैसे "सबसे छोटा कौन सा है ?" या "सबसे लम्बा कौन सा है ?'') उनकी मदद करनी पड़े और यह भी समझाना पड़े कि यह कार्य कैसे करना है। यदि बच्चे चीजों को गलत क्रम में रख दे तो उनसे इस तरह के प्रश्न पूछे जा सकते हैं: ''क्या A (चीज की ओर इशारा करके) C से छोटा है ?'' या ''यह बड़ा लगता है, इसे यहां क्यों न रख दें?'' वगैरह। इससे उन्हें व्यवस्था का विश्लेषण करने में मदद मिलेगी, और संबंधित अवधारणाओं की उनकी समझ बेहतर होगी।

अनुक्रम सम्बन्धी गतिविधियाँ करते वक्त 'पहली', 'आखिरी', 'इससे पहले' जैसे शब्दों को इस्तेमाल करने से बच्चों को इन अवधारणाओं को समझने में मदद मिलती है। इन गतिविधियों से बच्चों को यह समझने में भी मदद मिलेगी कि **गुण वास्तव में सापेक्ष होते हैं** जैसे, कोई बटन किसी एक समूह में सबसे बड़ा हो सकता है, जबकि किसी अन्य समूह में सबसे छोटा इस तरह, कोई निरपेक्ष परिणाम नहीं होते।

E4) ऐसी एक–एक खेल गतिविधि सुझाइए जिनमें बच्चे आकार, वजन तथा खुरदुरेपन के आधार पर अनुक्रम जमाएं। इनके कार्यों को करते हुए वे कौन सी अवधारणाएं विकसित कर पाते हैं?



अभी तक हमने बच्चों में वर्गीरण व अनुक्रम बनाने से सम्बन्धित क्षमताओं के विकास की गतिविधियों पर चर्चा की। आइए अब ऐसी गतिविधियों पर विचार करें जिनसे उन्हें एक–एक की संगति की अवधारणा समझने में मदद मिलेगी।

## एक–एक की संगति

मान लीजिए कि आपको कुछ प्यालियाँ और तश्तरियाँ (छोटी प्लेटें) दी गई हैं और यह पता लगाने को कहा गया है कि क्या सारी प्यालियों के लिए काफी तश्तरियाँ हैं। आप कैसे पता लगाएँगे ? प्यालियों और तश्तरियों की संख्या गिनकर! लेकिन अगर आपको गिनना न आता हो, तब क्या आप इस सवाल का जवाब दे सकेंगे ? जरूर, एक–एक प्याली का एक–एक तश्तरी से मेल बिठाकर। इसका मतलब है कि आप प्यालियों और तश्तरियों को परस्पर **एक–एक की संगति** में रख देते हैं। यानी, जोड़ी बनाना गिनने से ज्यादा आसान हैं, और गिनने की क्षमता की बुनियाद है। गिनती सीखते हुए स्कूलपूर्व बच्चों के साथ आपने कई बार नीचे दी गई स्थिति से मिलती–जुलती स्थितियों का सामना किया होगा।

**उदाहरण 4 :** एक शिक्षक ने 10 कंचे एक कतार में रख दिए और चार वर्षीय जसवंत से उन्हें गिनने को कहा। शिक्षक ने उसे कहा कि गिनते हुए वह कंचों को छूता जाए। जसवंत ने कंचों को तीन बार गिना, और हर बार अलग जवाब आया। हो यह रहा था कि गिनते वक्त वह या तो किसी कंचे को छोड़ देता था या किसी कंचे को दो बार गिन लेता था। उसकी गिनती कुछ–कुछ निम्नानुसार थी:

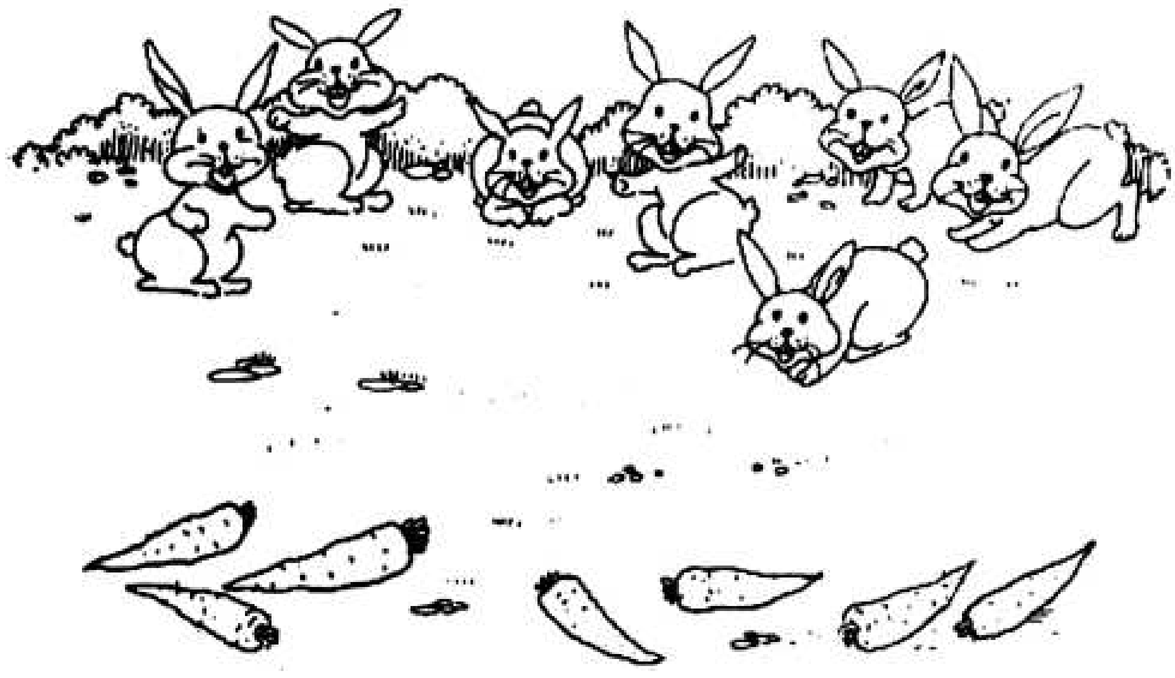
| • | • • | • | • • | • | • | • | • |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| एक | दो | तीन | चार | | पाँच छः | सात | आठ |

? आपके हिसाब से जसवंत इस तरह क्यों गिन रहा था?

जसवंत जैसे बच्चे अभी इस बात को नहीं पकड़ पाए हैं कि गिनते वक्त हर चीज को एक ही बार छुआ जाता है, किसी चीज को अछूता नहीं छोड़ा जाता और एक चीज को छूते वक्त एक ही संख्या बोली जाती है। दूसरे शब्दों में, उन्हें अभी एक–एक की संगति की अवधारणा समझना बाकी है। इस अवधारणा की समझ बनाने के लिए जरूरी है कि आप उन्हें ऐसे कई अवसर दें जिनमें वे चीजों को एक–एक की संगति में रखें। यह काम उनके गिनती को सीखने से **पहले** और उन्हें गिनती सिखाने के **दौरान** करना चाहिए।

एक–एक की संगति की समझ के अन्तर्गत बच्चों को 'बहुत सारे', 'थोड़े', 'से ज्यादा', ' से कम' और 'बराबर' जैसे शब्दों का अर्थ समझना होगा। इनके अर्थ समझने में रोजमर्रा के बहुत से अनुभवों से बच्चों को मदद मिलती है – जैसे कई बार उन्हें यह देखना पड़ता है कि क्या सब लोगों को खाना खिलाने के लिए काफी थालियाँ है, या जब वे दोस्तों के साथ मिठाई का बंटवारा करते हैं, वगैरह। हमें इन अनुभवों को और विस्तार देने की जरूरत है। कुछ गतिविधियाँ–

- बच्चों की एक कतार बनाकर बच्चे से कहिए कि वह उतनी ही तीलियों की एक कतार बनाए।
- बच्चे से कहिए कि वह उतनी पत्तियाँ (या फूल या मोती) इकट्ठे करे जितने कि समूह में कुल बच्चे हैं।
- आप एक समूह खरगोशों का और एक समूह गाजर का बना दें (चित्र 4 देखिए)। अब बच्चे से कहें कि वह एक–एक खरगोश को एक लाइन के जरिये एक–एक गाजर से जोड़ दें।



चित्र 4

ऐसी गतिविधियों से बच्चे यह देख और समझ पाएंगे कि एक–एक की संगति का अर्थ क्या है।

गतिविधि जो भी हो, यह जरूरी है कि उस दौरान **बच्चों को उसके बारे में बात करने को प्रोत्साहन किया जाए।** बच्चों से इस तरह के प्रश्न पूछें कि ''क्या जितने बच्चे हैं, उतनी ही पत्तियाँ भी हैं?'' या ''पत्तियाँ ज्यादा

या मोती?'', आदि । इस तरह के प्रश्नों से बच्चों की समझ बेहतर बनाने में मदद मिलती है।

E5) बच्चों को 'एक जितना' और 'एक–एक की संगति' समझाने के लिए एक–एक गतिविधि बनाइए। अपने पड़ोस के बच्चे / बच्चों पर इन्हें आजमाइए और अपने अवलोकन लिखिए।

इन गतिविधियों से हम बच्चों में वर्गीकरण, क्रमबद्ध करने और एक–एक की संगति बनाने की अवधारणाएं विकसित की जा सकती हैं। इन गतिविधियों के आयोजन में सावधानी बरतना बहुत जरूरी है। वरना हम अनजाने में बच्चों में गलत धारणा पैदा कर देंगे, जैसा कि नीचे दिए गए उदाहरण में हुआ।

'उतना ही लम्बा जितना' की बात करते हुए डॉली की शिक्षक हर बार तुलना के लिए एक छड का इस्तेमाल करती थी। नतीजा यह हुआ कि 'बराबर की लम्बाई' की अवधारणा डॉली के दिमाग में उस छड़ से जुड़ गई और वह यह मानने लगी कि 'बराबर की लम्बाई' की बात सिर्फ उस जैसी छड़ पर ही लागू होती है।

**इसलिए जरूरी है कि किसी अवधारणा को समझाते वक्त हम जितनी ज्यादा हो सके उतनी गतिविधियाँ, तरह–तरह की सामग्री के साथ बनाएं ताकि बच्चे अवधारणा की सही समझ बना सकें और उसे व्यापक कर सकें।** बतौर उदाहरण, बच्चों को यह अवसर दीजिए कि वे 'बराबर की लम्बाई' की बात को तीलियों, पेंसिलो, फीता , चम्मच, रस्सी जैसी अलग–अलग चीजों के संदर्भ में और अलग स्थितियों में देख सकें। तब इन सारे अनुभवों में से वे 'बराबर की लम्बाई' का अर्थ निकाल पाएंगे।

एक बात और कि कई बार बच्चे समझ सकने की **क्षमता की कमी की वजह से नहीं, बल्कि भाषा को न समझ पाने की वजह से** कुछ गतिविधियाँ नहीं कर पाते हैं।

**जहाँ तक हो सके ऐसी सरल भाषा और जुम्लों का इस्तेमाल करें, जिनसे बच्चे परिचित हों।**

E6) भाषा को न समझ पाना बच्चे द्वारा कोई कार्य किए जाने में कैसे रूकावट बन जाता है, इस बात को दर्शाने के लिए कोई उदाहरण दीजिए।

E7) वर्गीकरण की एक गतिविधि में शिक्षक ने बच्चों को गोल व चौकोर बटन दिए। सारे गोल बटन जामुनी रंग के थे जबकि सारे चौकोर बटन काले थे। अब शिक्षक ने एक गोल बटन उठाया और बच्चों से कहा कि वे बटनों के ढेर में से सारे गोल बटन उठा लें।

(क) क्या इस गतिविधि में कोई गलती है ? यदि हां, तो क्या ?

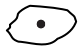
(ख) क्या शिक्षक पक्के तौर पर कह सकेंगे कि जिन बच्चों ने सही तरीके से गतिविधि पूरी कर ली है, वे गोलाकार की अवधारणा समझ गए हैं?

(ग) आप इस गतिविधि को कैसे बदलेंगे?

अब ऐसे कुछ तरीकों पर बातचीत करें जिनसे बच्चों को गिनती सीखने में मदद मिल सके।

## गिनती से परिचय

हम सब जानते हैं कि गिनने का मतलब क्या होता है! आप इस बात से भी सहमत होंगे कि संख्याओं के नाम रट लेने का यह अर्थ नहीं होता कि बच्चे को संख्या की अवधारणा समझ आ गई हो, या उसे गिनना आता है। यहाँ तक कि अगर कोई बच्ची अंक लिख पाए, तो भी यह जाहिर नहीं होता है कि उसे गिनती करना आता है।

**उदाहरण 5:** चार वर्षीय मरिअम्मा संख्याएं बोल रही थी – कुछ गिनती क्रम में, तो कुछ जो भी संख्या याद आ गई। उसकी चाची पास ही बैठी थी। उन्होंने मरिअम्मा से पूछा, ''क्या तुम 'दो' लिख सकती हो ?'' मरिअम्मा ने हां कहा, और निम्नानुसार लिख दियाः 

चाची ने पूछा कि यह साथ में क्या बनाया है तो मरिअम्मा ने जवाब दिया, ''बत्तख।'' जब पूछा गया कि बत्तख क्यों बनाए, तो मरिअम्मा ने जवाब दिया,—''किताब में दो ऐसे ही लिखा है।'' चाची ने जब '2 ❀ ❀' 2 लिखकर पूछा ⬭ कि क्या यह 'दो' है, तो मरिअम्मा का जवाब था ''नहीं''

जाहिर है कि मरिअम्मा को इस बात की बिल्कुल समझ न थी कि ''दो'', चीजों के **किसी भी समूह** पर लागू हो सकता है। तब क्या हम कह सकते हैं कि उसे संख्या पता है ? वैसे तो वह 1 से 10 तक की संख्याएं लिख सकती है।

चित्र 5 : अब मेरे पास दो बिल्लियाँ हैं।

बच्चों में गिनती या गिनने की क्षमता विकसित करने में जिस चीज से सचमुच मदद मिलती है, वह है **वास्तविक चीजों की गिनती।** बच्चे को दो पत्तियाँ, दो पेंसिलें, दो किताबें दिखाकर, दो बार ताली बजाकर या इसी तरह की गतिविधियों से 'दो' का अर्थ समझने की कोशिश करने दें। हर बार शब्द 'दो' पर जोर दें। इन विविध अनुभवों से बच्चे धीरे धीरे समझेंगे कि दो—दो चीजों के इन सारे समूहों में एक बात समान है, और वह है समान 'दो' का गुण।

इस तरह से हम उन्हें पांच तक की संख्याएं सिखा सकते हैं। **कोई जरूरी नहीं कि संख्याएं आम क्रम में ही सिखाई जाएं।** मसलन, बच्चे इन संख्याओं को 'एक', 'पांच', 'तीन', 'चार', के क्रम में सीख सकते हैं। संख्याओं का परम्परागत क्रम वे बाद में सीख सकते हैं। इससे उन्हें छोटी और बड़ी संख्याओं की समझ बनाने में मदद मिलेगी। इस बार हम उनसे ऐसे प्रश्न पूछ सकते हैं : ''मेरे पास कितने कंचे हैं ?'', ''मैं कितनी बार कूदी ?'', ''कौन से चार बच्चे बोर्ड पर आएंगे? '', वगैरह।

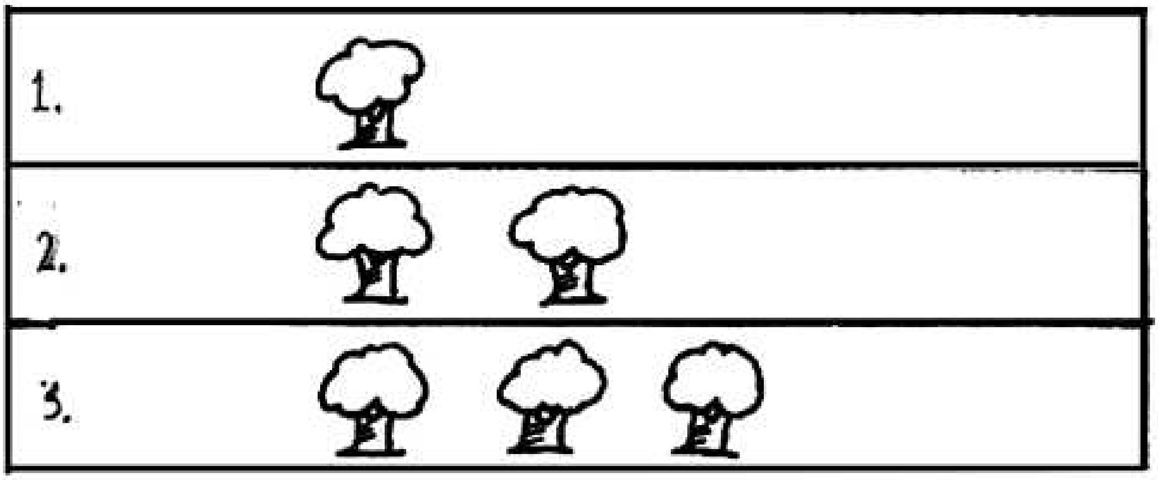
लेकिन **एक चेतावनी!** बच्चों को दिखाने के लिए गिनते वक्त हम अक्सर एक—एक को छूते हुए समझ लें कि 'एक, दो, तीन', वगैरह कहते जाते हैं। वे देखते हैं कि आप इन चीजों को छू रहे हैं और हर चीज के लिए एक नया शब्द बोल रहे हैं। हो सकता है कि वे एक, दो, तीन, आदि, उन चीजों के नाम हैं, जैसा कि ऊपर दिए गए उदाहरण 5 में हुआ था। हम बच्चों को यह कभी नहीं समझाते कि दूसरी चीज को 'दो' इसलिए कहते हैं कि क्योंकि हम वास्तव में दो चीजों के एक समूह की बात कर रहे हैं — एक चीज जो हमने पहले छुई थी और एक वह जिसे अब छू रहे हैं। चूंकि हम इस बात को समझते हैं, इसलिए हम मानकर चलते हैं कि बच्चे भी इसे समझ गए हैं। दरअसल हमें तो आभास तक नहीं होता कि बच्चे चक्कर में पड़ रहे हैं।

इस भ्रम से बचने का तरीका यह है कि अलग—अलग **अवसरों पर अलग—अलग की चीजों या क्रियाओं को गिनने का अभ्यास करवाया जाए।** हम यह भी कर सकते हैं कि पहली चीज को छूकर कहें, ''यह एक पत्ती हुई'', और इसके बाद पत्ती को अलग रख दें। फिर दूसरी पत्ती को उठाकर पहली के साथ रख दें और कहें

एक और पत्ती है, यानी अब ये दो पत्तियाँ हो गई।'' इसी तरह आगे बढ़ें। इस तरह अभ्यास तीलियों, गेंदों, पत्थरों, आदि कई चीजों के साथ किए जाने चाहिए। यह क्रियाओं के साथ भी लिए जा सकते हैं। जैसे आप एक दफा ताली बजाकर कहें, एक बार ताली बजाई।'' फिर दो बार ताली बजाकर कहें, ''अब मैंने दो बार ताली बजाई।'' इस तरह से जाहिर हो जाता है कि संख्या के नाम का संबंध उस वस्तु या क्रिया से न होकर उस समूह के आमाप से है जिसे हमने अलग किया है। इससे बच्चे को यह समझने में भी मदद मिलती है कि संख्याओं का एक क्रम होता है आने वाली हर संख्या, पिछली से एक ज्यादा होती है।

संख्याओं के संदर्भ में एक और पहलू है जिसे ध्यान में रखना जरूरी है। गिनती सिखाने के लिए चीजों का इस्तेमाल करते वक्त हम चीजों को हर बार एक खास पैटर्न में जमा देते हैं। मसलन, हम ज्यादातर दो कंचों को ऐसे •• तीन कंचों को ऐसे ••• और चार कंचों को ऐसे •••• रखते हैं हो सकता है कि बच्चे को यह गलतफहमी हो जाए कि दो, तीन चार आदि का सम्बन्ध चीजों की उस खास जमावट से है। और इस तरह हो सकता है कि बच्ची ••• को दो कंचे बताए। यदि हम **जमाने के तरीकों को बदलते रहें,** तो इस समस्या से बच सकते हैं। तीन चीजों दिखाते समय कभी उन्हें एक पंक्ति में तो कभी तिकोनी जमावट में रखा जा सकता है। इसी प्रकार से चार चीजों को कई तरह से रखा जा सकता है:

E8) एक महिला अपनी तीन वर्षीय बच्ची को 1 से 5 तक गिनती सिखा रही थी। इसके लिए वह बच्चों की अंक सम्बन्धी किताब का इस्तेमाल कर रही थी। इस किताब में हर संख्या के सामन उतने ही पेड़ बने हुए थे,




मां किसी संख्या और उसके सामने बने पेड़ की ओर इशारा करती और संख्या का नाम बोल देती। बच्ची मां के शब्दों को ज्यों का त्यों दोहरा देती। कुछ दिनों बाद जब बच्ची से कहा गया कि किताब में चार बताए तो उसने सही–सही बता दिया।

क्या उस बच्ची ने एक से पांच तक की संख्याओं का अर्थ समझ लिया है? इस तरिके से सीखाने में क्या समस्याएं है।

अभी तक हमने बच्चों को प्राकृतिक संख्याएं सिखाने की चर्चा की। आप उन्हें 'शून्य' का अर्थ कैसे सिखाएंगे? क्या आप इसके लिए मेरे शिक्षक का अनुकरण करेंगे, जिन्होंने शून्य का अर्थ 'कुछ नहीं' के रूप में बताया था? वे कहते थे, ''यदि तुम्हारे पास पांच गोलियां हैं, और तुम सारी खा जाओ, तो तुम्हारे पास कुछ नहीं

बचेगा। वही शून्य हैं।'' लेकिन इस तरह से बच्चे बहुत चक्कर में पड़ जाते हैं जब उनके सामने 0° सेल्सियस या किसी पैमाने पर बना 'शून्य' का निशान आता है। इसलिए बेहतर होगा कि बच्चों को शून्य का अहसास भी उसी तरह अलग–अलग ठोस वस्तुओं के साथ करने दिया जाए, जैसा कि अन्य संख्याओं के लिए किया था। जैसे, आप तीन पेंसिलें ले कर उनमें से एक हटा दें, दो बचीं; एक और हटा दें, एक बची; एक और हटा दें, शून्य **पेंसिलें** बचीं। इससे उन्हें पता चलेगा कि **किसी चीज का शून्य** होने का मतलब है 'कुछ नहीं'। यानी, **शून्य का मतलब 'कुछ नहीं' सिर्फ तब होता है, जब उसे एक विशेषण के रूप में इस्तेमाल किया जाए।**

**लेकिन एक संख्या के रूप में** शून्य किसी भी अन्य संख्या कि तरह एक संख्या है। बच्चों में यह विचार ठीक से बैठाने के लिए कि शून्य का मतलब 'कुछ नहीं' **नहीं** होता, आप संख्या–रेखा (number line) की मदद से कई खेल आयोजित कर सकते हैं। यह संख्या–रेखा फर्श पर बनाई जा सकती है, और इस पर किसी भी बिन्दु को 'शून्य' कहा जा सकता है। तब शून्य के आधार बिन्दु 1, 2, 3, वगैरह, हो जाएंगे। अब बच्ची तीन बार आगे की ओर कूदे और एक बार वापिस उल्टा कूदकर 2 पर आ जाए; एक बार और उल्टा कूदे और 1 पर आ जाए; फिर एक बार कूदकर शून्य पर आ जाए। इस खेल को कई तरह से खेलकर, और अन्य खेलों की मदद से बच्चों को यह समझने में मदद मिलेगी कि शून्य का मतलब 'कुछ नहीं' नहीं होता।

E9) आप बच्चों का परिचय शून्य के प्रतीक से कब कराएंगे – जब वे अवधारणा को समझ चुके हों या जब आप अवधारणा समझाना शुरू कर रहे हों?

हम में से ज्यादातर लोग बच्चों को शून्य से परिचित कराने के लिए ठोस वस्तुओं के जगह बात समझाने की बजाय सिर्फ '0' को बोर्ड पर लिख देते हैं, और सोचते हैं कि वे शून्य का मतलब और चिन्ह समझ गए हैं। हमें यही तरीका ज्यादा आसान लगता है। दरअसल बच्चे को किसी संख्या से परिचित कराने के लिए उसका संख्यांक (number) (यानी प्रतीक) बोर्ड या कागज पर लिख देने के हम आदी हो चुके हैं। बच्चे यह सोचें कि 'दो' का सम्बन्ध 2 की आकृति से है, और यह न समझ पाये कि 2 का संकेत दरअसल दो की अवधारणा को प्रदर्शित करने का एक **मनमाना** तरीका है। इसलिए बेहतर यही है कि **अंक तभी सामने लाए जाएं जब बच्चों में संख्या की कुछ समझ बन चुकी हो।** जैसे, जब आप बच्चे को 4–4 चीजों के कई समूहों का अनुभव चुके हों और वह आपको चार चीजें (जैसे चार कंचे) दिखा सके, तब आप बोर्ड (या कागज) पर 4 लिख सकते हैं। इस तरह से बच्चे पहले अंकों को पहचानना सीखते हैं। पहचान हासिल हो जाने के बाद ही बच्चों से अंक लिखने को कहना चाहिए।

जब बच्चे अंकों से परिचित हो जाएं तो आप उन्हें दिखा सकते हैं कि ये प्रतीक कितने मनमाने तरीके से चुने गए हैं। इसके लिए आप उन्हें पुराने और नए जमानों के अलग–अलग अंक–पद्धतियों में प्रतीक दिखा सकते हैं (सारणी 1)। **सारणी 1 : विभिन्न अंक–पद्धतियाँ**

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| हिन्दू-अरबी | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 10 |
| चीनी | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 十 |
| रोमन | I | II | III | IV | V | X |
| देवनागरी | १ | २ | ३ | ४ | ५ | १० |

E9) बच्चों को गिनती सिखाने के संबंध में हमने कई सुझाव दिए, जिनमें से कुछ नीचे लिखे हैं। क्या आप संक्षेप में बता सकते हैं कि इन सुझावों के पीछे क्या काम कर रही है ?

i) बच्चों को संख्या सिखाने के लिए तरह–तरह की परिचित वस्तुओं का इस्तेमाल करना चाहिए।

ii) बच्चों के सामने संख्याओं के मान पहले विशेषण के रूप में आने चाहिए, न कि संज्ञा के रूप में।

iii) बच्चों को संख्यांक तभी सिखाने चाहिए जब उन्हें ठोस चीजें गिनने का काफी अनुभव हो जाए।

iv) शून्य का मतलब 'कुछ नहीं' नहीं होता।

अभी तक हमने ऐसे विभिन्न तरीकों की चर्चा की जिनसे बच्चों को संख्या की अवधारणा तथा गिनने की क्षमता हासिल करने में मदद मिलेगी। ये तभी कारगर होंगे जब आप बच्चों को अवधारणाएं व कौशल हासिल करने के लिए काफी समय देंगे।

## सारांश

इस इकाई में हमने

1) 'गिनती करने' के अर्थ पर चर्चा की और यह स्पष्ट किया कि गिनने का मतलब संख्याओं के नामों को बोल पाना भर नहीं है।

2) इस बात पर चर्चा की कि **गिनती सीखने से पहले व सीखने के दौरान** बच्चे के लिए कई संख्या–पूर्व अवधारणाएं (जैसे वर्गीकरण, अनुक्रम में रखना, एक–एक की संगति जमाना) सीखना जरूरी होता है।

3) संख्या–पूर्व अवधारणाओं को विकसित करने के लिए गतिविधियों के सुझाव दिए।

4) बच्चे को गिनती सिखाने के तरीके सुझाए।

5) इस बात पर जोर दिया कि 0 से 9 तक की संख्याओं के प्रतीक बच्चे को तभी बताए जाएं जब उसे उन संख्याओं के अर्थ समझ आ चुके हों।

## पाठ–5

# इकाई दहाई और आगे

## परिचय

हमारा सामना प्रायःऐसे बच्चों से होता रहता है जो सैकड़ा, दहाई, इकाई से आसानी से नही निपट पाते, हालांकि अपने हिसाब से वे इस अवधारणा को 'सीख' चुके होते है । उदाहरण के लिए मेरे उस मित्र की ही बात लीजिए जिसे विभिन्न ग्रामीण व कस्बाई स्कूलों में कक्षा 6 व 8 के बच्चों से मेलजोल का काफी अनुभव है। ऐसे कई मौके रहे हैं जब यह संवाद सैकड़ा, दहाई, इकाई को लेकर हुआ है। उसने देखा कि इन कक्षाओं के बच्चे 5 अंक की संख्या को नहीं पढ़ पाते जबकि हमारे हिसाब से उन्हे ऐसी संख्याओं का 'ज्ञान' होना चाहिए। जब उनसे पूछा गया कि संख्या 20013 में 2 किस संख्या को दर्शाता है तो जवाब 2 सैकड़ा, 2 हजार 2 लाख और 2 करोड़ तक बताया गया। जाहिर था कि उन्हे इस बात का कोई भान नहीं कि संख्या में किसी अंक का स्थान क्या मान दर्शाता है । हाँ, एक बार थोड़ा सा इशारा भर मिल जाए तो वे तुरन्त ठीक उत्तर निकाल लेते थे।

समझ की यह कमी जोड़ने व घटाने के सवालों को हल करते वक्त भी झलकती है। जोड़ के सवालों में उन्हें बस इतना ख्याल रहता है कि जोड़ कॉलमवार किया जाता है। क्यों? क्योंकि शिक्षक ऐसा कहते हैं। और जब उन्हें 3–3, 4–4 अंको की संख्याओं का जोड़ करने के कहा जाता है, तो वे अक्सर जवाब के अंक गलत कॉलम में लिख देते हैं । ऐसा करने पर, हमारे हिसाब से, असामान्य या असंभावित उत्तर निकल आते हैं। हाँ, बच्चे ऐसा नहीं सोचते हैं।

इस सबसे हम बहुधा हताश हो जाते हैं। हम पढ़ाने की कोशिश छोड़ देते हैं, और या तो बच्चों को डांटने लगते हैं या उन्हे 'मूर्ख' और बुद्धू कहने लगते हैं। इसके बजाय क्या यह बेहतर नहीं होगा कि हम अपने आप से पूछें कि क्या हमने वाकई यह समझने की कोशिश की है कि बच्चे क्यों नहीं समझ पाते? शायद उन्हे पर्याप्त गतिविधियां न मिल पाई हों कि वे सम्बंधित अवधारणाओं को अच्छी तरह से समझ पाएं। या यह भी मुमकिन है कि हम खुद, जो उन्हे सिखाने की कोशिश कर रहे हैं, उन अवधारणाओं को ठीक से समझ न पाए हों?

हमने इस पाठ में इन्हीं समस्याओं को लिया है आप इन समस्याओं को गहराई से समझ पाएंगे, और यह भी देख पाएंगे कि इसका कोई एक समाधान नहीं है।

इस पाठ को पढ़ने से आप में इतना आत्मविश्वास व दिलचस्पी पैदा हो जाएगी कि आप दशमलव प्रणाली में स्थानीय मान की अवधारणा सिखाने के नए तरीके आज़मा सकें।

## समझ बढ़ाना

एक दिन मैं अपनी 7 वर्षीय भतीजी को बच्चों की एक किताब '203 बिल्लियां' दिखा रही थी। उसने हाल ही में स्कूल में बड़ी संख्याओं को लिखना सीखा था । उसने काफी आत्मविश्वास के साथ किताब का शीर्षक देखा और पढ़ा भतेईस बिल्लियां । मैंने उससे शीर्षक को फिर से देखकर पढ़ने को कहा। उसने एक बार फिर 203 को तेईस पढ़ा। तब मैंने एक कागज़ पर 213 लिखकर उसे पढ़ने को कहा। इसे उसने सही–सही दो सौ तेरह पढ़ दिया । तो वह 203 को सही क्यों नहीं पढ़ पाई थी? दिक्कत कहां थी ? क्या यह मुमकिन है कि उसने कभी इस बात का ख्याल ही न किया हो कि संख्यांक में किसी अंक के स्थान का क्या महत्व है? या क्या समस्या का सम्बंध उसकी शून्य की समझ से है?

इन सवालों का जवाब पाने के लिए शायद हमें पीछे लौटकर यह देखना चाहिए कि मेरी भतीजी के शिक्षक ने उसे संख्यांक लिखना – पढ़ना कैसे सिखाया था।

**उदाहरण 1 :** पहली कक्षा में शिक्षक ने बोर्ड पर अंक 0, 1........,9 लिखे थे । इसके बाद उन्होने सभी बच्चों से प्रत्येक अंक से सम्बंधित संख्या के नाम दोहराने को कहा था । और आखिर में उन्होने सभी बच्चों से होम वर्क पुस्तिका में कई बार ये अंक लिखवाए थे ।

इसके कुछ महीने बाद शिक्षक ने उन्हे दो अंक वाली संख्याएं सिखाना इस तरह शुरू किया । सबसे पहले उन्होने बच्चों को एक अंक वाली संख्याएं याद दिलाई । इसके बाद उन्होने बोर्ड पर लिखा –

10
11
12
13
14
15
16
17
18
19

उन्होने जो भी लिखा था, बच्चों ने उसे ठीक वैसे ही उतार लिया । अब शिक्षक ने एक – एक संख्यांक की ओर इशारा करते हुए संख्याओं के नाम बोलना शुरू कर दिया । आखिर में उन्होने बच्चों से हरेक संख्यांक पांच – पांच बार लिखवाई । साथ में कहती गई, भ1 के साथ 0 लिखो दस, 1 के साथ 1 लिखो ग्यारह, ...1 के साथ 9 लिखो, उन्नीस ।

थोड़े और अभ्यास के बाद वे संतुष्ट हो गई कि बच्चे 1 से 100 तक की संख्यांक जानते हैं। अगले साल इसी तरह से बच्चों को सिखाया गया कि 101 ये 1000 तक की संख्याओं को कैसे दर्शाये । दूसरी कक्षा की शिक्षक ने उन्हे यह भी बताया कि यदि वे उन्हे कोई संख्या, जैसे एक सौ बावन, लिखने को कहें, तो पहले वे अपनी कापी में सै. द. इ. लिखे (चित्र 1 में है।) उन्होने सहज ही समझा दिया कि यहां सै. द. इ. का अर्थ सैकड़ा, दहाई, इकाई होता है। चूंकि एक सौ बावन में एक सैकड़ा, पांच दहाई, और दो इकाई हैं, इसलिए बच्चे सै, के नीचे 1, द. के नीचे 5 और इ. के नीचे 2 लिखें।

इसके बाद शिक्षक ने उन्हे दो व तीन अंकों की संख्याएं लिखने की काफी कवायद करवाई।

| सै. | द. | इ. |
|---|---|---|
| 1 | 5 | 2 |

चित्र – 1

आखिर में, उसने बच्चों को संख्यांक में किसी अंक का स्थान और स्थानीय मान का मतलब बताया । शिक्षक ने ब्लैकबोर्ड पर कुछ उदाहरण देकर इसे समझाया (उदाहरण के लिए, 427 में 4, 2 और 7 के स्थानीय मान क्रमशः 4 X 100, 2 X 10 और 7 X 1 हैं।) इसके बाद बच्चों को निम्नलिखित किस्म के सवाल गृहकार्य (Homework) के लिए दे दिए :

251 में कितनी दहाई हैं?

ज्यादातर बच्चों का जवाब था 5, मगर एक बच्चे ने कहा 25 हैं।

आपके ख्याल से जवाब में ये अलग – अलग अन्तर क्यों आए होंगे?

हममें से कई लोग इकाई, दहाई, सैकड़ा की अवधारणा काफी मशीनी ढंग से सिखा देते हैं। इस तरीके से

सिखाए जाने पर बच्चे कह देते हैं कि 251 मे 5 दहाई हैं। जबकि हमें थोड़ा गहराई में जाकर, कुछ ठोस गतिविधियों के इस्तेमाल से बच्चों को याद दिलाना चाहिए कि आखिरकार एक सैकड़ा भी 10 दहाई के बराबर होता है। तभी वे यह समझ पाएंगे कि 251 में 25 दहाई हैं।

E1) ऊपर दिए गए तरीके से सिखाए जाने के बाद एक बच्ची 203 को तेईस पढ़ती है । उसे अपनी गलती का एहसास कराने के लिए आप क्या गतिविधियां सुझा सकते हैं?

मैंने सोचा कि अपनी भतीजी को उसी तरह अंक पद्धति समझाऊँ जैसे कि मेरे मित्र ने अपने बच्चों को समझाया था।

**उदाहरण 2 :** मैंने अपनी भतीजी को ढेर सारे मोती दिए और दिखाया कि उससे वह 10–10 मोतियों के समूह कैसे बनाए । फिर मैंने उसे दिखाया कि वह 10 मोतियों के एक समूह को एक पंक्ति में रख सकती है और उन्हे एक लड़ी कह सकते हैं । जब वह कुछ लड़ियां बना चुकी तो मैंने उसे बताया कि 10 लड़ियों की एक माला बन सकती है ।

उसने मोतियों से लड़ियां और मालाएं बनाना शुरू किया और धीरे – धीरे अपने दिमाग में माला व लड़ी का आपसी सम्बंध भी बनाती गई । थोड़ी देर बाद मैने उससे पूछा कि एक माला के बदले वह कितनी लड़ियां देगी । कुछ देर वह सोचकर बोली, ''10''

तब मैंने उससे पूछा कि 107 मोतियों से वह कितनी मालाएं बना सकती है । उसने कुछ देर सोचने के बाद कहा, ''10 लड़ियां, और 7 मोती बचेंगे।'' मैने पूछा, ''तो मालाएं कितनी बनेंगी?'' उसकी मदद के लिए मैंने उससे 107 मोती लेकर अधिक से अधिक जितनी मालाएं बन सकें, बनाने को कहा । शर्त यह है कि एक माला में 10 लड़ी हों और हर लड़ी में 10 मोती हों। उसने मोती लिए और 1 माला बनाई, व 7 मोती बच गए।

फिर मैने उससे पूछा कि इस बात को वह लिखेगी कैसे। हम दोनों ने मिलकर एक पद्धति बनाई जिसमें हमने मा./ल./मो. लिख लिया – मालाओं की संख्या मा. के नीचे, लड़ियों की संख्या ल. के नीचे तथा मोतियों की संख्या मो. के नीचे लिखना था । मा. के नीचे उसने 1 लिखा और मो. के नीचे 7 लिखा । मैंने पूछा, ''लड़ियों की संख्या का क्या होगा?'' उसने जवाब दिया, ''लड़ियां तो हैं ही नहीं।'' तो मैंने उससे पूछा कि इस बात को कैसे दर्शाएगी । थोड़ी देर सोचने के बाद ल. के नीचे उसने 0 लिख दिया ।

(नोट : बच्चे कई बार अंक में 0 नहीं लिखते क्योंकि वे सोचते हैं कि 0 तो 'कुछ नहीं' दर्शाता है इसलिए लिखने की क्या ज़रूरत है।)

अब मैंने मा. ल. मो. के ऊपर सै. द. इ.लिख दिया, और उससे पूछा कि क्या यह ठीक है? उसने थोड़ा सोचा और फिर कहा कि ठीक है क्योंकि 100 मोतियों की एक माला है और 10 मोतियों की एक लड़ी । मैने कहा ''बढ़िया ! और अब बताओ 325 कितना होगा?'' उसने फौरन जवाब दिया, ''3 माला 2 लड़ी 5 मोती'' तो ये कितने मोती होंगे ''तीन सौ पच्चीस'', उसका जवाब सही था ।

चित्र 2 : दस दस और एक एक के समूहों में गिनना

इस तरह के चन्द और सवालों के बाद हमने एक खेल खेला । मैंने उसे 3 अंक दिए । उसे करना यह था कि उनकी मदद से जितनी संख्याएं बना सके बनाए । इन संख्याओं को घटते क्रम में रखना भी था । जब मुझे लगा कि उसे इस खेल में मजा आ रहा है, तो मैंने 4 अंक दे दिए । उसने इनकी मदद से सारी संभव संख्याएं बना डालीं । यहां तक कि 0,1,2,व 9 अंक देने पर उसने 0129 जैसी संख्या भी बनाई । मुझे एहसास हुआ कि ऐसी बातों को सीखने के लिए बच्चों को पूरा समय दिया जाना चाहिए । उन पर कोई दबाव नहीं होना चाहिए। और यह एक अच्छा मौका था कि वह यह सब कर सके।

अतः यह जरूरी है कि बच्चे को **किसी अवधारणा के इस्तेमाल का मौका बार–बार दिया जाए**। क्योंकि हो सकता है कि किसी एक वक्त पर बच्ची उस गतिविधि को कर पाए । मगर इससे यह नहीं मान लेना चाहिए कि वह इसे बाद में भी दोहरा पाएगी। इसलिए मैंने हफ्ते – दस दिन बाद यह गतिविधि, तथा इसी मकसद से दूसरी गतिविधि, उसके साथ दोहराई। इस दौरान मैंने उसे कई ऐसे अभ्यास दिए जिनसे उसे सै. द. इ. के उपयोग का मौका मिल पाए।

E2) उदाहरण 1 और 2 में सै. द. इ. पढ़ाने के तरीकों की खूबियां और कमियां क्या हैं?

E3) क) बच्चों को सै. द. इ. का अभ्यास करवाने के लिए एक और गतिविधि सोचिये। खासकर ऐसी गतिविधि सोचिये जिसके दौरान बच्चे ऐसे संख्यांकों से सामना करें, जिनके एक या ज्यादा अंक हों।

ख) अपनी गतिविधि की तुलना मेरे द्वारा की गई गतिविधि से कीजिए। कौन सी बेहतर है, और क्यों?

E4) एक ऐसी गतिविधि सुझाइए जो 50 बच्चों की एक कक्षा में सै. द. इ. को सिखाने के लिए उपयोगी हो। गतिविधि ऐसी संख्यांको को लेकर हो जिनमें कम से कम एक अंक शून्य हो।

हमें याद रखना जरूरी है कि **आम तौर पर स्थानीय मान की अवधारणा बच्चे थोड़ी देर से सीखते हैं।** यह समझ तब विकसित होती है जब बच्चे अंकगणितीय संक्रिया लागू करने में बेहतर होने लगते हैं। हमें यह बात भी पहचानना चाहिए कि यह **समझ बहुत साफ नहीं होती,** और न ही ऐसा होना जरूरी है।

## संक्रियाएं लागू करने से सम्बंधित दिक्कतें

जोड़–घटा की दिक्कतो के संदर्भ में हम कुछ लोग कक्षा 4 के बच्चों की परीक्षा ले रहे थे। हमने उन्हे कुछ सवाल ऐसे दिए जो आड़े लिखे हुए थे, और कुछ सवाल खड़े लिखे हुए थे। कुछ जोड़ के सवालों में 'हासिल' आता था, जबकि घटाने के सवालों में उधार लेना पड़ता था।

बच्चों की उत्तर पुस्तिकाएं देखने पर हमें कुछ ऐसी बातें पता चलीं जिनकी उम्मीद नहीं थी। जिन बच्चों ने सभी सवालों के सही उत्तर लिखे थे, उनके बारे में हम कुछ भी नहीं सीख पाए। जिन बच्चों ने सारे सवाल या लगभग सारे सवाल, गलत किये उनके बारे में हम यही कह सके कि उन्हे ठोस वस्तुओं की मदद से जोड़–घटा फिर से सीखने की जरूरत है। लेकिन जिन बच्चों ने कुछ सवालों में गलती की थी, उनके जवाबों से बहुत कुछ सीखने को मिला।

हर जवाब और उससे मिलने वाले सबक को तो यहां दे पाना मुश्किल है। लेकिन हमने मोटे तौर पर जो कुछ पैटर्न देखे, उनकी बात करते हैं। ये अवलोकन निम्नलिखित हैं:–

i) खड़े रूप में लिखे सवालों के सही जवाबों का प्रतिशत आड़े सवालों के सही जवाबों की तुलना में ज़्यादा था।

ii) जिन सवालों में हासिल का पचड़ा नहीं था, उसमें ज्यादा बच्चे सफल हुए थे।

iii) कुछ बच्चों ने सवाल लिखते समय या बोर्ड से उतारते समय, अंको के स्थान बदल दिये थे। नतीजा यह हुआ कि उनके उत्तर सही जवाबों से कहीं ज्यादा ऊँचे थे। लेकिन वे ऐसे जवाबों से ज़रा भी

परेशान नहीं हुए क्योंकि ये उत्तर उन्हे अजीब नहीं लगा। इसलिए गलत उत्तर आने पर उन्हें इस बात की जरूरत महसूस नहीं हुई कि सवाल करने के अपने तरीके पर थोड़ा विचार कर लें। हो सकता है कि निम्नलिखित अभ्यास करने के बाद आप इनमें कुछ और अवलोकन जोड़ना चाहेंगे।

E5) अपने आसपास के कक्षा 4 या 5 के कुछ बच्चों के लिए दो अंको वाली संख्याओं को जोड़ व घटा के सवालों का एक प्रश्न पत्र तैयार कीजिए । कुछ सवाल खड़े रूप में लिखे हों तथा कुछ आड़े रूप में। प्रश्न पत्र करते वक्त बच्चे आपस में बातचीत न करें और न ही एक दूसरे की उत्तर–पुस्तिका से नकल करें । इस बात का ध्यान रखें।

क) ऊपर बताए अवलोकनों के अनुसार जवाबों का विश्लेषण करें। हो सकता है कि आप कुछ नई बात जोड़ना चाहें।

ख) जिन बच्चों ने गलतियां की हों, उनकी उत्तर–पुस्तिका को ध्यानपूर्वक देखिए क्या इन गलतियों में आप कोई पैटर्न देख पाते हैं?

ग) बच्चों से बातचीत के माध्यम से पता कीजिए कि इनमें से कितनी गलतियां इस बात से जुड़ी है कि बच्चे महसूस करते हैं कि वे सै. द. इ. को ठीक समझ नही पाए हैं।

अब नन्हे मुकेश की दिक्कत पर ध्यान देते हैं।

उदाहरण 3 : एक दिन मुकेश गृहकार्य में खड़े जोड़ के कुछ सवाल कर रहा था उसे ये जोड़ करने थे :

$$\begin{array}{r} 6\ 8 \\ +\ 4\ 5 \\ \hline \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5\ 3 \\ +\ 3\ 4 \\ \hline \end{array}$$

पहला सवाल तो उसने आसानी से ठीक उस तरह कर लिया जैसे शिक्षक ने सिखाया था। पहले उसने 3 और 4 को जोड़ा व 4 के नीचे 7 लिख दिया। इसके बाद 5 और 3 को जोड़कर 3 के नीचे 8 लिख दिया।

दूसरा सवाल भी हो ही गया । इसे करते हुए वह बड़बड़ा रहा था, भ8 + 5 = 9, 10, 11, 12, 13, तो यहां 5 के नीचे 13 लिख दूं । फिर 6 + 4 बराबर 7,8,9,10 होगा, तो यहां (4 के नीचे) लिखा 10, हो गया। वह अपने उत्तर 1013 से संतुष्ट था । मगर अगले दिन शिक्षक संतुष्ट नही हुई।

उसकी शिक्षक ने जल्दी से वह तरीका दोहराया जो वे पिछले दिन कक्षा को बता चुकी थीं। तरीका यों था : 68 + 45 मे 8 + 5 बराबर 13 होता है, इसलिए 5 के नीचे 3 लिखो और 1 को सवाल के दाहिनी तरफ़ लिख दो (चित्र 3 (क)) फिर 6 + 4 होगा 10, और जोड़ा बाजू का 1, तो यह हो गया 11 (चित्र 3 (ख))। तो 4 के नीचे लिखो 11, और इस तरह उत्तर हुआ 113.

$$\begin{array}{r} 6\ 8 \\ +\ 4\ 5 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 6\ 8 \\ +\ 4\ 5 \\ \hline 1\ 1\ 3 \\ \hline \end{array}$$

(क) (ख)

चित्र 3

मुकेश के कई साथियों में सवाल करने में ग़लती की थी । शिक्षक ने सोचा कि यह तो बस अभ्यास की बात है लिहाजा उन्होने बच्चों को आगे के लिए सवाल करने को दे दिए इसके बाद वे अन्य अवधारणाएं पढ़ाने लगीं। कुछ बच्चे तो ये नई बातें किसी तरह समझ पा रहे थे, लेकिन बाकी बच्चे पीछे छूटते जा रहे थे।

E6) आपके मुताबिक क्या कारण हैं कि मुकेश व उसके साथी सवाल करने में असफल रहे?

यदि आप उदाहरण 3 में बच्चों की दिक्कत पर बारीकी से गौर करे, तो शायद आपको लगे कि उन्हें यह दिक्कत इसलिए आती है क्योंकि उन्हे संख्यांको में अंकों के स्थानों की अच्छी समझ नहीं है । मेरे पड़ोसी की बच्ची, जो कक्षा 3 में है, यही दिक्कत महसूस करती है। मैंने उसके साथ एक तरीका आज़माया।

**उदाहरण 4** : राधा जोड़ के कुछ सवाल करने में मेरी मदद चाहती थी। मैंने उससे उससे पूछा कि क्या वह मेरे तरीके से करने को तैयार है। थोड़ा हिचकते हुए वह मान गई। तो मैंने उससे कहा कि 15, 25 और 10 को जोड़ने में मेरी मदद करें। उसने कहा, भपहले मुझे इसे लिख लेने दो। इसके बाद उसने चित्र 4 में दिखाए गए तरीके से सवाल को किया। मैंने उससे पूछा कि उसने यह जवाब कैसे निकाला। उसने कहा, ''सबसे पहले मैंने इकाई स्थान के अंको को जोड़ा, 5 + 0 + 5 ¾ 10 और इसे लिख लिया। फिर मैने दहाई स्थान के अंको को जोड़ लिया यह आया 4, तो उत्तर हुआ 410.''

मैंने उसकी गलती पर उसे टोका नहीं, लेकिन उसके साथ निम्नलिखित गतिविधि की। मैंने उसे ढेर सारी माचिस की तीलियाँ देकर कहा कि वह इस ढेर में से 10–10 तीलियों के कुछ बण्डल बनाए । अब मैने उससे 5 तीलियां देने को कहा, जो उसने कर दिया। जब मैंने उससे 10 तीलियां देने को कहा तो उसने गिनकर 10 तीलियां दीं, धीरे – धीरे उसे समझ आया कि 1 बण्डल देने का अर्थ होगा कि 10 तीलियां दीं, और जब हमारे पास 10 तीलियां हों, तो 1 बण्डल बनाया जा सकता है। जल्दी ही किसी भी संख्या में तीलियां मांगने पर वह जरूरी संख्या में बण्डल व तीलियां देने लगी :

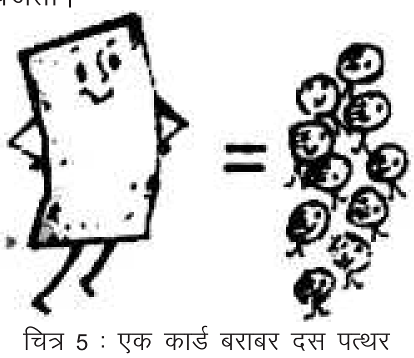
मैने उससे पूछा, ''यदि इन बण्डलों और तीलियों को जोड़ दे ंतो कितना मिलेगा ? उसने सारे गण्डलों व तीलियों को गिनकर कहा, ''45''.

इसके बाद मैंने उससे 35 तीलियां देने को कहा उसने मुझे 3 बण्डल और 5 तीलियां दीं। अब मैंने उससे 60 तीलियां मांगी। थोड़ी देर सोचकर उसने मुझे 6 बण्डल दे दिए।

इसके बाद मैने उसे अपने साथ एक खेल खेलने को कहा। मैंने उसकी बड़ी बहन और मुकेश को भी बुला लिया। हम काफी सारे पत्थर, एक पासा, लगभग 20 कार्ड और दस रंगीन मोती लेकर एक घेरे में बैठ गए मैंने बताया कि हममें से हरेक के पास एक कागज होगा जिस पर हम खेल कैसे आगे बढ़ रहा है इसे दर्ज करते जाएगें। इस कार्ड में तीन कॉलम थे : एक कॉलम पत्थरों का, एक कार्डो का, और एक मोतियों का।

खेल निम्नानुसार खेला जाता है :

हर खिलाड़ी बारी–बारी से पासा फेंके। पासे पर दिखने वाले अंक के बराबर पत्थर वह उठा ले। पत्थरों की संख्या को वह पत्थर वाले कॉलम में लिख ले। जब उसकी बारी फिर से आए तो वह फिर पासा फेंके और उसके अनुसार पत्थर उठा ले। यदि उसके पास कुल पत्थरो की संख्या 10 से ज्यादा हो जाए तो वह 10 पत्थर वापिस मुख्य ढेर में डालकर बदले में 1 कार्ड उठा ले। जब भी ऐसा हो जाए तो उस खिलाड़ी को अपना रिकार्ड बदलकर लिखना होगा कि अब उसके पास कितने कार्ड और कितने पत्थर हैं । जिसके पास पहले पांच कार्ड आ जाएंगे वही विजेता।



चित्र 5 : एक कार्ड बराबर दस पत्थर

हम सबको खेल में मज़ा आया। 3–4 दफ़ा खेलने के बाद मेरे अलावा बाकी सब एक न एक बार जीत चुके थे। मैंने सुझाव दिया कि खेल को और आगे बढ़ाएं।

अब खेल में हमें 10 या 10 से ज्यादा कार्ड इकट्ठा करने थे। और जिसके पास 10 कार्ड आ जाए वह 10 कार्ड बीच में रखकर उनके बदले में 1 मोती उठा ले। जिसके पास सबसे पहले तीन मोती आ जाएं वही विजेता। यह खेल खूब लंबा खिंचा और कोई जीतता नहीं लगता था। अचानक मुकेश बोल उठा, भइस खेल में बहुत समय लगेगा क्योंकि हर मोती के लिए 10 कार्ड लगते हैं और 1 कार्ड के लिए 10 पत्थर लगते हैं। यानी हर मोती के लिए 100 पत्थर लगेंगे। मैंने कहा भठीक है, हम खेल को दो पासों से खेलकर विजेता का फैसला कर सकते हैं। जब हम दो पासो से खेले, तो मुझे और राधा की बड़ी बहन को कई बार बाकी दोनो की चार्ट भरने में मदद करनी पड़ी। और जल्दी ही वे थक गए।

E7) दो पासे वाला खेल मुश्किल क्यों था?

E8) क्या आपको लगता है कि उदाहरण 4 की गतिविधि इकाई, दहाई, सैकड़ा और उनके आपस के सम्बंध को समझने में मददगार हो सकती है? यदि हां, तो किस तरह?

यदि नहीं, तो एक ऐसी गतिविधि तैयार कीजिए, जो इस इकाई में अब तक न आई को, जिससे बच्चों को इकाई / दहाई / सैकड़ा समझने में मदद मिल सके।

उदाहरण 4 में दी गई गतिविधियों में कौन सा सिद्धांत लागू हुआ है? क्या यह लेन –देन का सिद्धांत नहीं? यानी वह सिद्धांत जिसके अनुसार जब हम संख्यांक में दाईं से बाईं ओर एक स्थान से अगले पर चलना शुरू करें, तो इसका एक उसके दस के बराबर होगा, वगैरह। जैसा कि आपने देखा, **चार गणितीय संक्रियाओं को सही व आसानी से कर पाने के लिए बहुत जरूरी है कि बच्चे यह सिद्धांत अच्छी तरह से समझ लें।**

दरअसल कोई बच्ची यह बात समझी है या नहीं इसका आकलन इस आधार पर किया जा सकता है कि वह दिमाग़ी गणित के निम्नलिखित उदाहरणों में सैकड़ा / दहाई / इकाई को कितनी आसानी से और सही रूप से इनसे जूझ पाती है ।

(i) किसी संख्या, खासकर ऐसी संख्या जिसमें 9 का अंक हो ;मसलन 93द्ध , में 1,10 या 100 ;या इसका कोई गुणजद्ध दिमागी़ तौर पर जोड़ना ।

(ii) किसी संख्या, ख़ासकर ऐसी संख्या जिसमें 0 का अंक आए ;मसलन 804द्ध , में से 1,10,100 ;या इसका कोई गुणजद्ध दिमागी तौर पर घटाना ।

यहां एक दिमागी गतिविधि का उदाहरण प्रस्तुत है, जिससे बच्चों को दिमागी जोड़ व घटा करने के आदी होने में मदद मिलेगी । यह गतिविधि कई बच्चों के साथ, उन्हें तीन – चार समूहों में बांटकर भी की जा सकती है, और अकेले बच्चे के साथ भी की जा सकती है।

ब्लैकबोर्ड पर निम्नानुसार शीर्षक लिखें :

| 1 घटाओ | 2 जोड़ो | 100 घटाओ | 20 जोड़ो |
|---|---|---|---|

अब हर शीर्षक के नीचे एक – एक संख्या लिख दें और बच्चों की अलग – अलग टोली से कॉलम आगे बढ़ाने को कहें । मसलन आप इन शीर्षकों के नीचे क्रमशः 404, 184, 901 और 150 लिख दें । अब टोलियाँ आपको 404–1, 184+2, 901–100, 150+20, के उत्तर देंगी। जो टोली सबसे पहले उत्तर देगी उसे एक अंक मिलेगा । खेल इसी तरह आगे बढ़ सकता है।

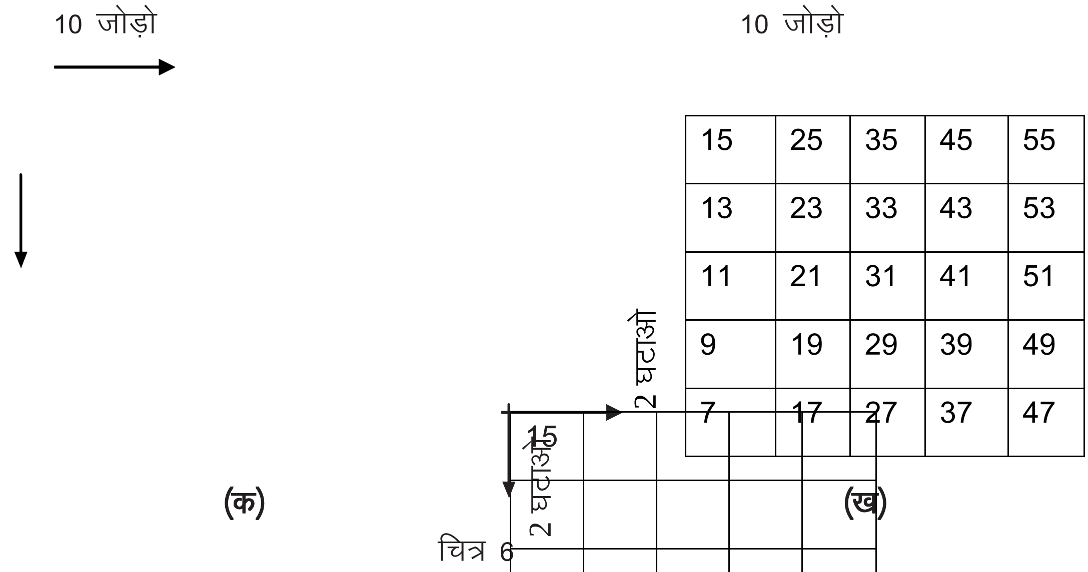
इसी प्रकार से यदि बच्चे अलग – अलग काम कर रहें हैं तो आप हर बच्चे को एक उत्तर – पत्रक दे सकते हैं जिन पर सही शीर्षक लिखे हों । उनसे कहा जा सकता है कि वे एक निर्धारित समय में 8 चरण पूरे करें।

ये सारे चरण दिमागी तौर पर संक्रिया करके पूरे करने होगे । उदाहरण के लिए, यदि कॉलम '100 घटाओ' 801 से शुरू होता है तो बच्चे को 801,, 701 ,601, 501,....., 1 लिखना होगा।

यह गतिविधि किसी भी परिस्थिति के हिसाब से ढाली जा सकता है । मसलन 11 वर्षीय या उससे बड़े बच्चों के लिए उत्तर – पत्रक निम्नानुसार हो सकती है:–

| **1 पैसा घटाओ** | **2 पैसे जोड़ो** | **1 रूपया घटाओ** | **20 पैसे जोड़ो** |
|---|---|---|---|
| रू. 404 | रू. 184 | रू. 9.01 | रू. 1.50 |

9 या 10 वर्षीय बच्चों के लिए इसी गतिविधि का एक दिलचस्प रूप चित्र 6 ;क में दिखाई गई ग्रिड के साथ हो सकता है। इस ग्रिड में आड़े और खड़े दिशा में चलने के निर्देश 1 जोड़ो, 1 घटाओ, 10 जोड़ो, 100 जोड़ो, 5 घटाओ, आदि द्वारा बताए जा सकते हैं । एक प्रारंभिक संख्या ऊपर बाएं कोने पर लिख दें और अंतिम संख्या निचले दाएं कोने पर लिखी हो।




| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 15 | 25 | 35 | 45 | 55 |
| 13 | 23 | 33 | 43 | 53 |
| 11 | 21 | 31 | 41 | 51 |
| 9 | 19 | 29 | 39 | 49 |
| 7 | 17 | 27 | 37 | 47 |

(क) (ख)

चित्र 6

बच्चे खुद ही इन को भर सकते हैं: यह ध्यान रखना होगा कि वे पंक्ति में बाए से दाएं चलते हुए तथा कॉलम में ऊपर से नीचे चलते वक्त निर्देशों का पालन करें ।

E9) ऊपर सुझाई गई दो गतिविधियां अपने आसपास के कुछ बच्चों के साथ कीजिए। इस बात का मूल्यांकन कीजिए कि क्या वाकई में इनसे बच्चों की दिमागी गणित करने की क्षमता बेहतर हुई।

एक और गतिविधि जिससे बच्चों को ठोस चीजों से सै. द. इ. की अमूर्त समय की ओर बढ़ने में मदद मिलती है, वह है संख्या चार्ट (चित्र 7)। इस चार्ट की मदद से कई प्रकार की गतिविधियां संभव हैं। मसलन बच्चे को चार्ट पर कोई भी संख्या चुनने को कहें। अब वह पता करे कि क्या यह संख्या अपने ठीक ऊपर या नीचे वाली संख्या से बड़ी है। या छोटी ।इसके बाद उससे कहा जा सकता है कि वह बड़ी संख्या में से छोटी संख्या घटाकर उनके बीच का अन्तर पता करे।

बच्चे से यह भी पता करने को कहा जा सकता है कि उसके द्वारा चुनी गई संख्या हर दिशा में पड़ोसी संख्या से कितनी कम या ज्यादा है। और आगे, उससे यह भी पता करने को कह सकते हैं कि क्या चार्ट में संख्याओं का कोई पैटर्न है। मसलन किस दिशा में संख्याएं घट/बढ़ रही हैं, किस दिशा में अन्तर दहाई में है, और क्यों।

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 |
| 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 |
| 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 |
| 40 | 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 |
| 50 | 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 |
| 60 | 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 |
| 70 | 71 | 72 | 73 | 74 | 75 | 76 | 77 | 78 | 79 |
| 80 | 81 | 82 | 83 | 84 | 85 | 86 | 87 | 88 | 89 |
| 90 | 91 | 92 | 93 | 94 | 95 | 96 | 97 | 98 | 99 |

चित्र 7: 10 x 10 का संख्या चार्ट

क्या इस चार्ट से बच्चों को हासिल/उधार समझने में भी मदद मिल सकती है ? रानी के उदाहरण से शायद आपको इस प्रश्न का जवाब देने में मदद मिले ।

7 वर्षीय रानी संख्या चार्ट के साथ काम कर रही थी । उसे 37 और 26 को जोड़ने के लिए कहा गया था । उसने चार्ट पर 37 ढूंढ लिया था और सोच रही थी कि आगे क्या करे । उसकी मदद करने के लिए शिक्षक ने उससे पूछा कि क्या वह 26 को दो भागों में बांट सकती है । रानी ने कहा "हाँ 13 और 13".

"ठीक, अब 13 को भी बांटो", शिक्षक ने कहा।

"10 और 3".

"तो, अगर 13 बराबर 10 धन 3 है, इसी तरह 26 किसके बराबर होगा?"

"20 धन 6" , रानी ने थोड़ा रूककर कहा।

"ठीक । अब तुम्हारे पास 37 है और तुम्हे उसमें 26 जोड़ना होगा। तो क्या ऐसा कर सकती हो कि पहले 20 जोड़ दो और फिर 6 जोड़ दो?" शिक्षक ने पूछा। रानी सहमत थी। "तो ऐसी संख्या पर कैसे पहुंचोगी जो 37 से 26 ज्यादा हो?"

वह दो खाने नीचे बढ़ी, और फिर 6 खाने दाईं ओर बढ़ते हुए किनारे पर पहुँच गई और उसे नीचे और बाएं बढ़कर दूसरे किनारे पर जाना पड़ा, तब उसे समझ में आने लगा कि इस संदर्भ में 'हासिल' का अर्थ क्या है। 57 से वह दाईं ओर बढ़ते हुए 59 तक आई और फिर 60 पर गई, जो कि अगली पंक्ति के बाएं छोर पर था। अब उसने 63 तक गिना।

वास्तव में रानी यह सीख रही थी कि किसी संख्या को इकाई व दहाई में कैसे बांटे और जोड़े ताकि वह हासिल का अर्थ समझ सके। बांटने की प्रक्रिया बच्चों को पहले ठोस चीजों की मदद से सिखाई जानी चाहिए, जैसे कि उदाहरण 4 में बताया गया है। धीरे–धीरे दो अंको की संख्याओं को इकाई–दहाई के रूप में लिखकर जोड़ने काम करना शुरू कर सकते हैं। उदाहरण के लिए,

1. 34 → 3 दहाई व 4 इकाई
+28 2 दहाई व 8 इकाई

5 दहाई व 12 इकाई
= 5 दहाई व 1 इकाई
= 6 दहाई व 2 इकाई
= 62

शुरू में ऐसे सवालो को इस तरह करने से बच्चों को यह समझने में मदद मिलती है कि अंक को अगले कॉलम में हासिल कहकर जोड़ा क्यों जाता है।

शायद आप भी अब कुछ गतिविधियां करना चाहें।

E10) एक ऐसी गतिविधि सुझाइए जिसमें आसपास मिलने वाली चीजों का उपयोग करके शिक्षक कक्षा में सैकड़ा, दहाई, इकाई की समझ विकसित कर सके । इस गतिविधि की रचना करते हुए आपने किन बातों को ध्यान में रखा ?

E11) एक ऐसा खेल बनाइए जिसमें जीतने के लिए सैकड़ा, दहाई, इकाई सीखने की प्रक्रिया शामिल हों।

अभी तक हमने इस बात पर चर्चा की कि संख्याओं को दशमलव प्रणाली में दर्शाने से सम्बधित अवधारणा समझने में बच्चों की मदद कैसे करें। कुछ किताबें व व्यक्ति इस संदर्भ में 'स्थानीय मान' शब्द का इस्तेमाल करते हैं। लेकिन हममें से कितने इस अवधारणा का अर्थ समझते हैं ? अगले भाग में हम इसी अवधारणा पर विचार करेंगे।

## स्थानीय मान क्या है? →

दशमलव प्रणाली में सभी संख्याएँ सिर्फ 10 प्रतीकों के इस्तेमाल से लिखी जाती हैं । इन प्रतीकों को हम अंक (digit) कहते हैं। प्रणाली की खासियत यह है कि इसमें हर अंक का मान संख्यांक में उसके स्थान पर निर्भर होता है । इसलिए दशमलव प्रणाली में बड़ी से बड़ी संख्या काफी छोटे रूप में लिखी जा सकती है। उदाहरण के लिए, दस, सौ और हजार दो ही अंको, 1 और 0, से दर्शाए जाते हैं । अन्तर सिर्फ अंको के **स्थानों** में है।

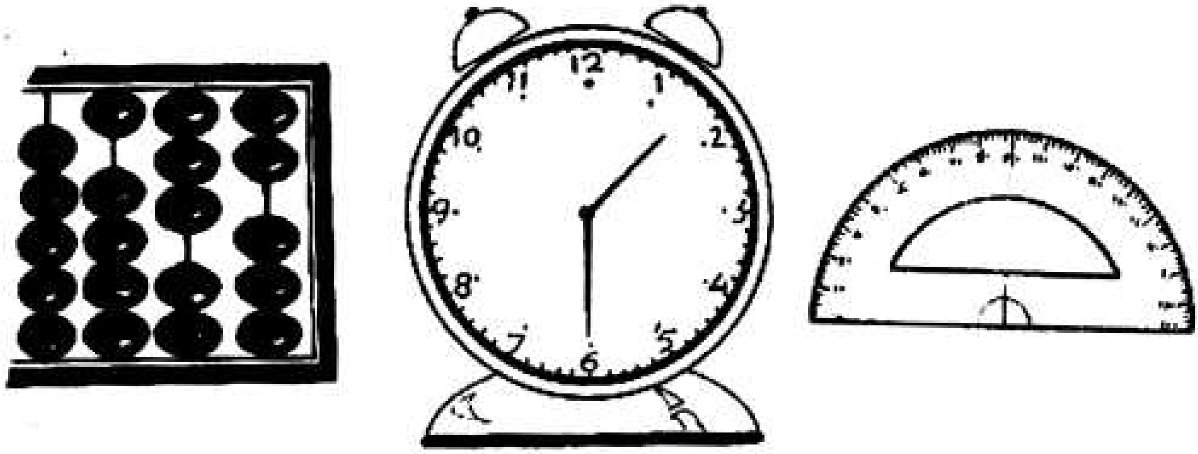
***"प्राथमिक स्कूल के बच्चे शायद "स्थानीय मान "की व्यापक अवधारणा न समझ पाएँ "***

ऐसा इसलिए सम्भव है क्योंकि हम हर स्थान का अलग–अलग मान निर्धारित कर देते हैं। इन मानों को ही स्थानीय मान कहते हैं । उदाहरण के लिए, दशमलव प्रणाली में दाएँ से बाएँ क्रम में कॉलम का मान 1 (यानी $10^0$,) 10 (यानी $10^1$) , 100 (यानी $10^2$) , आदि होते हैं इसलिए 1420 में 4 का मान $4 \times 100 = 400$ होगा।

क्या आप अनुमान लगा सकते हैं कि यदि हमारी अंक प्रणाली का आधार 7 और 7 की घातें हों, तो 1420 में 4 का स्थानीय मान कितना होगा ? इस प्रणाली में दाएं से बाएं चलते हुए स्थानीय मान क्रमशः $1, 7^1, 7^2, 7^3$,.......यानी 1,7,49,343, आदि होगे । इसलिए इस प्रणाली में 1420 में 4 का मान $4 \times 7^2 = 196$ होगा ।

और द्वि – आधारी प्रणाली (binary system), यानी जिस प्रणाली मे आधार 2 व 2 की घातें हों, उसमें 10 को कैसे लिखेंगे ? इस प्रणाली में इकाई, दहाई, सैकड़ा के स्थान पर इकाई, दो, चार, आठ, वगैरह, स्थानीय मान होगें । चूकि $10 = (8x\ 1) +2 = (8x1)+ (4x\ 0) +(2\ x\ 1) + (1x\ 0)$ होगा, इसलिए द्वि–आधारी प्रणाली में दस को 1010 लिखा जाएगा ।

आजकल द्वि–आधारी प्रणाली का महत्व काफी बढ़ गया है क्योंकि इसका उपयोग कम्प्यूटरों में होता है । पंच–आधारी प्रणाली का उपयोग अबेकस (abacus) में होता है (चित्र 8) । बारह–आधारी प्रणाली का उपयोग चीजों को दर्जन से गिनने में किया जाता है। साठ–आधारी प्रणाली का उपयोग समय व कोण दर्शाने में किया जाता है।



चित्र 8: (क) अबेकस का हिस्सा जिसमें $0 \times 125 + 1 \times 25 + 3 \times 5 + 2 \times 1 = 42$ को दर्शाया है,
(ख) घड़ियों में 60 के आधार का उपयोग, (ग) चाँदा

यदि आप रोमन प्रणाली जैसी अन्य अंक प्रणालियों पर गौर करेंगे तो 'स्थानीय मान ' के फायदे को बेहतर ढंग से सराह पाएंगे । रोमन प्रणाली में प्रतीकों से निरूपण बाएँ से दाएँ को होता है । सबसे बाईं ओर सबसे बड़ी संख्या का प्रतीक लिखा जाता है । संख्याएँ जैसे जैसे बड़ी होती जाती हैं उनके प्रतीक जटिल होते जाते हैं । मसलन 337 को रोमन प्रणाली में CCCXXXVII लिखा जाता है।

दस के आधार पर (दशमलव प्रणाली में) लिखी गई संख्यांको को हिन्दू–अरबी संख्यांक कहते हैं ।

E12) द्वि–आधारी व पंच–आधारी प्रणालियों में 5, 16, 25 और 32 के निरूपण क्या होंगे, व क्यों?

## सारांश

इस पाठ में हमने बच्चों के सामने आने वाली ऐसी कुछ समस्याओं की चर्चा की जो इसलिए आती हैं क्योंकि वे इकाई / दहाई की अवधारणाओं को ठीक से नहीं समझे हैं। खास तौर से हमने

- समूहीकरण की ऐसी गतिविधियों पर विचार किया जिनसे उन्हे यह अवधारणाएं समझने में मदद मिल सकती है।
- कुछ ऐसी गतिविधियों पर गौर किया जिनमे बच्चों का वास्ता ऐसी संख्याओं से होता है जिनमें कम से कम एक अंक शून्य हो।
- ऐसी समस्याओं के उदाहरण देखे जो तब सामने आती हैं जब बच्चे अंकगणित की संक्रियाऐं लागू करते हैं।
- ऐसे तरीकों पर चर्चा की जिनसे बच्चो को बिन्दू (3) में आने वाली दिक्कतों से जूझने में मदद मिल सकती है।

# पहला और आखिरी गणित

**पाठ – 6 जोड़ना और घटाना**

जोड़ने का मतलब – घटाने की समझ– जोड़ने और घटाने का संबंध – एल्गोरिदम का इस्तेमाल – अंदाज लगाना – सारांश।

**पाठ – 7 गुणा और भाग ....**

परिचय–गुणा करने से पहले गुणा की समझ– पहाड़े या तोता रटंत? – गुणा का एल्गोरिदम – भाग का मतलब– भाग का एल्गोरिदम – सारांश?

दुनिया में आज भी कुछ अलग थलग समाज हैं – महासागर के छोटे गुमनाम टापुओं में, या फिर घने जंगलों के बीचों बीच – जहाँ लोगों की गिनती बहुत सादी है। वे एक, दो, या तीन, चार तक की ही गिनती जानते हैं। चार से ज्यादा सब चीज़ों को वे ''बहुत'' कहते हैं, चाहे वे पाँच ही हों या पचास। इन समाजों में भी भरा पूरा जीवन है जो हज़ारों सालों से चलता आया है। लेकिन वहाँ गणित का विकास ''तीन'' या ''चार'' से ज्यादा नहीं हो पाया है। क्यों?

इसकी वजह है प्रयोजन, यानि जरूरत। ये छोटे–छोटे समाज आत्मनिर्भर जीवन जीते हैं। इनका जीने का साधन मछली मारना या शिकार होता है। जंगली फल, फूल, पत्ते इनके काम में आते हैं। ये खेती नहीं करते। कबीलों के सामूहिक जीवन में जितना उत्पादन होता है, पूरा कबीले में ही बंट जाता है। व्यापार जैसी कोई चीज़ का चलन संभव नहीं होता। गौर करें तो साफ हो जाएगा कि ''चार'' से ज़्यादा गिनने की कोई तलब ही नहीं होती। तो ज्यादा चीज़ों को ''बहुत'' कहने से काम बखूबी चलता है।

खैर, इससे हमें एक नायाब सुराग मिलता है कि सामाजिक प्रयोजन, यानि ज़रूरत, से गणित उपजता है।

जाहिर है, विकसित समाजों में, जहाँ हजारों चीजों के व्यापार का जाल कुलबुलाता है, वहाँ चीजों का बराबर हिसाब बहुत ज़रूरी हो जाता है। पचीस बोरी दाल और बारह बोरी मूली बेचकर दस बोरी गेहूँ और एक बोरी नमक खरीदा। इसका हिसाब ज़रूरी ही नहीं, जानलेवा है। तो उपजता है, जोड़, घटा, गुणा, भाग।

अंग्रेजी में एक कहावत है कि किसी को जीवन में सिर्फ तीन ''र'' की ज़रूरत पड़ती है : ''रीडिंग'', यानि पढ़ना, ''राइटिंग'', यानि लिखना और ''(ए) रिथमेटिक'', यानि गणित। पूरे जीवन के तमाम उतार चढ़ावों के लिये इतनी विद्या काफ़ी है। और यह बात कोई पुरानी बतकही या बकवास भी नहीं है। अपने आसपास के बीए, एमएससी पास लोगों से कालेज से दस बरस बाद बात करके देखो तो यही मिलेगा कि वे इतिहास, भूगोल, एल्जब्रा, वगैरह सब भूल गये होते हैं। याद रहते हैं बस यही तीन ''र'' – पढ़ना, लिखना, गणित।

एक और एक और एक और एक को जोड़ा तो मिला : चार। दूसरी तरफ दो को दो से गुणा किया तो मिला : चार। क्या रिश्ता है? खेत से निकली गाजरों को बाज़ार ले जाने से पहले गिनना है। या तो गिनो एक, दो, तीन, चार, ... ऐसे। लेकिन बीच में भूल हो गयी तो? फिर से शुरु करना पड़ेगा – टाइम लगेगा, मेहनत लगेगी। चार या पाँच तक गिनना आसान है। गाजरों को पाँच – पाँच के बंडलों में रखो, फिर बंडलों को गिनो। चालीस बंडल बने $5 \times 40 = 200$ गाजरें। यानि : गुणा जोड़ने का ही दूसरा तरीका है। इसी तरह, भाग भी घटाने का ही दूसरा तरीका है। और जोड़, घटा, गुणा, भाग – ये सब गिनने के ही अलग–अलग तरीके हैं। आखिर असली बात है :गाजरों का व्यापार और इस सबक में इन्हीं सब पर चर्चा करेंगे।

# पाठ–6

# जोड़ना और घटाना

## जोड़ का मतलब समझाना

एक शिक्षक बच्चे से पूछते हैं– ''एक और एक कितना?'' बच्चे का जवाब होता है, ''और बड़ा एक।'' यह जवाब बहुत ही अनोखा है। लेकिन, क्या कई मामलों में यह जवाब जायज़ नहीं हैं, जहाँ 'और' का मतलब 'मिलने' से होता है? जैसे जब दो नदियां आपस में मिलती हैं और फिर पहले से बड़ी, ज्यादा चौड़ी एक नदी के रूप में बहती हैं?

क्या यह आम तौर पर सही नहीं है कि जब हम दो राशियों को जोड़ते हैं तो हमें ज्यादा बड़ी राशि हासिल होती है? घर पर भी आपको इसके कई उदाहरण मिल जाएंगे। कई बार आपने छोटे समूहों को जोड़कर एक बड़ा समूह बनाया होगा, नहीं ? कैसे 2 संतरे और 5 संतरे जोड़ने से, या आटे में पानी मिलाने पर आपको ज्यादा मात्रा प्राप्त हो जाती है। अलबत्ता इस इकाई में हम उन्हीं समूहों के जोड़ पर ध्यान देंगे जिनमें चीजों की गिनती की जा सके, जैसे संतरे या चपातियाँ। हम आटे और नदी जैसे उदाहरणों की बात नहीं करेंगे, जो कि इस तरह गिनी नहीं जा सकती।

यहाँ हम उन तरीकों की बात करेंगे जिनसे बच्चों को यह समझने में मदद मिले कि विभिन्न समूहों को जोड़ने का अर्थ यह पता लगाना होता है कि इनमें कुल चीजें कितनी हैं। हम चाहेंगे कि वे इससे सम्बन्धित अवधारणाओं और भाषा को समझ जाएं।

छोटे बच्चों के लिए जरूरी होता है कि जोड़ की संक्रिया का कोई ठोस संदर्भ हो। शुरू में उन्हें काफी सारे ठोस अनुभवों की जरूरत होती है। जैसे, बच्ची को 2 कंचो और 3 कंचो की ढेरियाँ देकर पूछ सकते हैं, कि कुल कितने कंचे हैं।'' फिर उसे तीन टहनियाँ और 2 टहनियाँ दी जा सकती हैं। तीन बटन–दो बटन, तीन पत्थर–दो पत्थर, तीन बिस्कुट–दो बिस्कुट, वगैरह देकर इसी संक्रिया को दोहराया जा सकता है। हर बार उसे प्रेरित करें कि जो कुछ वह करे, उसको बताती जाए, जैसे कि ''ये 2 कंचे हैं, और ये 3 कंचे हैं। मैने उनको मिला दिया। अब (गिनते हुए) ये 5 कंचे हैं।'' शुरू में शायद उसे मदद की जरूरत हो। आप कुछ सवाल पूछ–पूछ कर उसकी मदद कर सकते हैं, जैसे, तुम्हारे पास कितने पत्थर थे? मैंने तुम्हें कितने पत्थर और दिए? तो कुल कितने पत्थर हुए?

धीरे–धीरे जब वह अपने द्वारा की गई क्रिया का वर्णन करना सीख जाए, तब आप 'जोड़ना' शब्द प्रस्तुत करके उसे बच्ची द्वारा की जाने वाली क्रिया से जोड़ सकते हैं। धीरे–धीरे यह शब्द उसकी भाषा का अंग बन जाएगा, और इसे वह समूहीकरण से संबंधित करने लगेगी। इन्हीं तरीकेां से वह 'कुल', 'धन', आदि शब्दों को भी समझने लगेगी।

अब, जब वह जोर–जोर से बोले, ''2 कंचें और 3 कंचे बराबर 5 कंचे'', आप बोर्ड या कागज पर $2 + 3 = 5$ लिख सकते हैं। जब वह बोले, ''2 पेंसिल और 3 पेंसिल बराबर 5 पेंसिल'', आप फिर $2 + 3 = 5$ लिख सकते हैं। इसी तरह के कई उदाहरणों से वह प्रतीकात्मक निरूपण '$2 + 3 = 5$' को जानने लगेगी। कई जोड़–तथ्यों को देखकर ही वह उनको खुद प्रतीकों में लिखने लगेगी। अभ्यास के साथ वह इन प्रतीकों से अच्छी तरह से वाकिफ हो जाएगी।

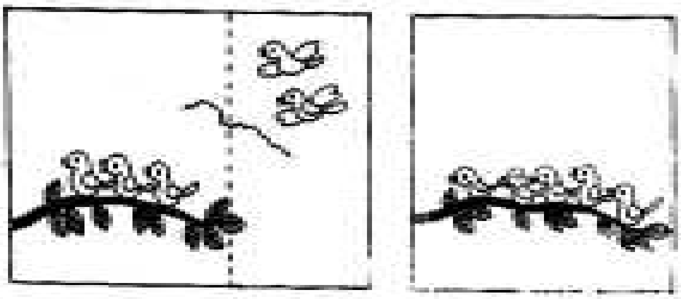
वस्तुओं के समूहों को मिलाने के काफी अनुभवों के बाद ही बच्चे जोड़े के गुण को समझ पाते हैं, जैसे कि $3 + 2$ और $1 + 4$ एक ही बात है, या अगर $3 + 2 = 5$ है तो $5 = 3 + 2$ होगा।

**उदाहरण 1 :** सुश्री मेहता दिल्ली के एक सरकारी प्राइमरी स्कूल में पढ़ाती हैं। कक्षा 1 में उनके पास आने

वाले बच्चे कुछ संख्याओं से वाफिक होते हैं। सत्र के शुरू में सुश्री मेहता बच्चों से कंकड़ जैसी चीजें इकट्ठी करके गिनने को कहती हैं। फिर वे उनसे कहती हैं कि उन चीजों की दो ढेरियाँ बनाएँ, और पता लगाएं कि दोनों को मिलाकर कुल कितनी चीजें हैं। यही काम वे ऐसी कई चीजों के साथ दोहराती हैं जो बच्चों को आसपास ही आसानी से मिल सकें। इसके बाद वे बच्चों को खेलों के द्वारा जोड़ने के अभ्यास के मौके देती हैं बिना उन्हें ये बताएं कि वे जोड़ना सीख रहे हैं। इसके लिए वे नीचे दिए गए खेलों की मदद लेती हैं।

दो बच्चों को दो या दो टोलियों को पासे और पत्थर दे दीजिए। हर बच्ची (या टोली) पासा फेंकती है और पासे पर आने वाली संख्या के बराबर पत्थर उठा लेती है। दो बार करने के बाद जिसके पास ज्यादा पत्थर होते हैं वही विजेता। पूरी गतिविधियों के दौरान टोली के एक सदस्य को जोर से बोलते जाना होता है कि उसकी टोली क्या कर रही है।

सुश्री मेहता और भी कई तरह की गतिविधियों का उपयोग करती हैं। मसलन वे बच्चों को चित्र 1 में दिखाए गए चित्र कार्ड जैसे कार्ड हिस्सों में दिखाती हैं। पहले सिर्फ बैठी हुई तीन चिड़िया दिखाती हैं, और उसके बाद 2 चिड़ियां जो उड़कर आ रही हैं। अब वे बच्चों से यह पता लगाने को कहती हैं कि कुल कितनी चिड़िया हैं।



चित्र 1 : 3 + 2 = 5 की चित्र प्रस्तुति

जब वे उत्तर निकाल लेते हैं, तब वे चित्र का दाहिना हिस्सा खोलती हैं। बच्चे यह गतिविधि कई कार्डों के साथ करते हैं। वे हर कार्ड में निम्नानुसार कुछ लिखित भाग भी जोड़ देती हैं और इसे लाइन–दर–लाइन खोलती हैं।

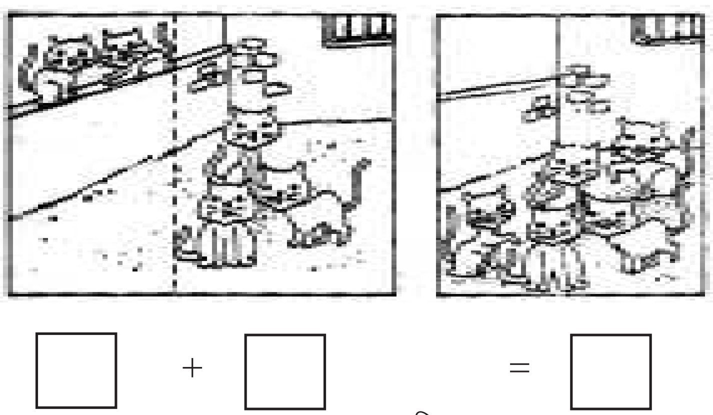
**3 और 2 मिलाकर बनते हैं 5**

**3 और 2 होंगे 5**

**3 और 2 बराबर 5**

**3 + 2 = 5**

धीरे–धीरे इस तरह के काफी अनुभव के बाद उन्होंने पाया कि बच्चे 'धन' और 'बराबर' को अपने प्रतीकों के साथ जोड़ने लगे। तब वे उन्हें चित्रात्मक वर्कशीट–देती है, जैसी कि चित्र 2 में दिखाई गई है। वे बच्चों से चित्रों के नीचे उनमें दिखाए गए जोड़ लिखने को भी कहती हैं।



चित्र 2

वे बच्चों को ऐसी कई गतिविधियों के बाद '3+4 =.......' जैसे प्रश्न करने को देती हैं। वे कहती हैं, ''सिर्फ अभ्यास से ही बच्चे '+' और '=' से वाकिफ हो सकते हैं।''

तो सुश्री मेहता का तरीका है कि बच्चों को जोड़ से परिचित कराने के तीन चरण हैं – ठोस चीजों के संदर्भ में, चित्रण प्रस्तुति और प्रतीकात्मक प्रस्तुति।

E1) क्या जोड़ना ऊपर दिए गए तरीके से सिखाया जाना चाहिए ? अपने उत्तर का कारण दीजिए।

E2) बच्चों को चीजों के समूहों को जोड़ने का ठोस अनुभव देते समय, हमें एक जैसी चीजों का इस्तेमाल करना चाहिए। क्या आप इससे सहमत हैं ? अपने उत्तर का कारण दीजिए।

यह बहुत महत्वपूर्ण है कि बच्चे जिस अवधारणा को सीखने की कोशिश कर रहे हैं, उन्हें उस अवधारणा से संबंधित ढेर सारे इबारती सवाल करने का अवसर मिले। इस तरह के बहुत–से सवाल हल करते हुए बच्चे जोड़ने की अमूर्त संक्रिया को अर्थ देने लगते हैं। जब मैं अपने पाँच वर्षीय पड़ोसी से पूछती हूँ कि 4 और 2 कितने होते हैं, तो वह तरह–तरह के अनुमान लगाता है। लेकिन जब मैं उससे यह पूछती हूँ कि अगर उसकी माँ चार चपाती खाए और वह खुद दो चपाती खाए तो कुल कितनी चपातियों की जरूरत होगी, तो उसका उत्तर सही होता है। कारण यह है कि यह संदर्भ उसकी दुनिया से जुड़ा हुआ है।

**बच्चों को इबारती सवाल लगभग शुरू से ही दिए जाने चाहिए,** न कि 'मूल तथ्य सीख जाने' के बाद।

जैसे– पांच वर्षीय मीता के पास दो टेनिस गेंदें थी, ओर एक दोस्त तीन गेंदों वाला एक डिब्बा लेकर आया। मीता ने तुरन्त सबको बताया कि अब उसके पास पांच गेंदे हैं। दो दिन बाद हमने एक 'क्रिकेट मैच' खेला जिसमें हमने दो और टेनिस गेंदों का उपयोग किया। मीता ये गेंदे भी रखना चाहती थी। तो उसने कहा ''अगर मुझे ये गेंदें भी मिल जाएं, तो मेरे पास ढेर सारी गेंदे हो जाएंगी।'' मैंने पूछा, ''कितनी?''

उनसे इस तरह के प्रश्न पूछिए : 'यदि तुम इन कंचों को (एक ढेरी की ओर इशारा करते हुए) इन कंचों में (दूसरी ढेरी की ओर इशारा करके) मिला दो, तो तुम्हारे पास **कुल** कितने कंचे हो जाएंगे ? इससे उन्हें जोड़ की समझ बेहतर बनाने में मदद मिलेगी। हाँ यह जरूर है कि ऐसे **सवाल आसान हों** और ऐसी विभिन्न परिस्थितियों से संबंध रखते हों जो बच्चों की दुनिया से जुड़ी हों।

मोटे तौर पर, जोड़ से संबंधित दो किस्म के इबारती सवालों से बच्चों का वास्ता पड़ता है।

- **एकत्रीकरण :** जब उन्हें दो या दो से अधिक राशियों (जैसे वस्तुओं के समूह, पैसे, दूरी, आयतन, आदि) को मिलाकर एक राशि बनानी होती है। (जैसे, यदि मुन्नी के पास 3 पेंसिलें हैं और मुन्ना के पास दो, तो कुल कितनी पेंसिलें हैं?)
- **वृद्धि :** जब किसी राशि को किसी निश्चित मात्रा से बढ़ाना हो, और बढ़ी हुई राशि को ज्ञात करना हो। (जैसे, एक थैले में 5 बोतलें हैं और इसमें 4 बोतलें और डाली गई हैं अब थैले में कितनी बोतलें होंगी?)

E3) ऊपर लिखी दो किस्मों में क्या अन्तर है ? बच्चों के लिए इनमें से किसे समझना ज्यादा मुश्किल होता है?

E4) कुछ ऐसी गतिविधियों व इबारती सवालों की सूची बनाइए जिनसे बच्चों को दी गई दो किस्मों की समझ बनाने में मदद मिल सके।

जब ऊपर बताए गए तरीके से बच्चों को जोड़ने का तजुर्बा हो जाए, तब आप कैसे जांचेंगें कि उन्होंने सचमुच इस अवधारणा को समझ लिया है? यह तो है ही कि जब बच्चे ठोस व चित्र–आधारित गतिविधियाँ कर रहे होंगे, उस दौरान तो आप उनका मूल्यांकन, लगातार करते रहेंगे। आप उनसे यह भी कह सकते हैं कि वे

**किसी संख्यात्मक जोड़ के आधार पर खुद इबारती सवाल बनाएं।** मसलन, उनसे कहा जा सकता है कि 3 + 5 = 8 को दर्शाती दो स्थितियाँ बताएं।

अब तक हमने उन तरीकों पर बात की जिनकी मदद से बच्चों को छोटी–छोटी संख्याओं के संदर्भ में जोड़ से परिचित कराया जा सकता है। इस मुकाम पर उनका परिचय 'उलट संक्रिया' के नाते घटाने से कराया जा सकता है।

## घटाने की समझ का विकास

घटाने की प्रक्रिया जोड़ने की प्रक्रिया की उल्टी है। किसी संग्रह में कुछ और डालकर उसे बड़ा बनाना तथा उस संग्रह में से कुछ निकालकर उसे छोटा करना परस्पर विपरीत प्रक्रियाएं हैं।

आइए, कुछ ऐसी स्थितियों पर गौर करें जहाँ बच्चों के लिए यह पहचानना आवश्यक होगा कि उस सवाल का हल निकालने के लिए घटाने की जरूरत है। जोड़ने की तुलना में घटाने से संबंधित सवाल बच्चों के लिए ज्यादा पेचीदा होते हैं। कारण यह है कि इसमें उन्हें यह पहचानना पड़ता है कि किस राशि को निकाल देना है। यह एक महत्वपूर्ण अंतर है क्योंकि इससे पहले बच्चों का सम्पर्क जोड़ से हुआ था, जहाँ 2 + 3 = 3+ 2 होता था। मगर 9 – 3 और 3 – 9 एक ही बात नहीं है। यानी घटा में संख्याओं का क्रम नहीं बदला जा सकता है, अर्थात् **घटा क्रमविनिमेय संक्रिया नहीं है।**

चलिए, घटा से संबंधित कुछ ऐसे इबारती सवालों की किस्में देखें जो बच्चों के सामने आती रहती हैं। मोटे तौर पर चार किस्में हैं।

- **हिस्से करना–** कुछ चीजों को निकालने या हटाने तथा बची हुई चीजों की संख्या पता करने की क्रिया। (जैसे, डिब्बे में 15 टॉफियां थी। 10 खाई गई, तो कितनी बचीं?)
- **कमी मालूम करना–** जब मूल राशि और शेष बची राशि पता हैं, तब यह पता लगाना है कि कितनी राशि हटा दी गई या निकाली गई है। (जैसे, किसी डिब्बे में 15 टॉफियाँ थीं, और अब सिर्फ 5 बची हैं तो कितनी खाई गई हैं?)
- **तुलना–** दो समूहों या संख्याओं के बीच अंतर पता लगाना, यानी एक समूह में दूसरे के मुकाबले कितना कम या ज्यादा है। (जैसे, यदि मुन्ना के पास 15 रबड़ हैं और मुन्नी के पास 5 हैं, तो मुन्नी के पास मुन्ना से कितने रबड़ कम हैं?)
- **पूरक जोड़–** किसी संख्या या समूह को बढ़ाकर किसी अन्य संख्या या समूह में तब्दील करने के लिए कितना जोड़ना होगा। (जैसे, यदि किसी कक्षा में 50 बच्चे बैठ सकते हैं और 20 पहले से बैठे हुए हैं, तो कितने बच्चे उस कक्षा में बैठ पायेंगे?

ऊपर दी गई चार किस्मों में से बच्चों को पूरक जोड़ पहचानने में सबसे ज्यादा कठिनाई होती है। इस किस्म से संबंधित ज्यादातर सवालों में 'और कितना' पूछा जाता है। बच्चे के लिए 'और' का संबंध जोड़ से होता है, और वह सवाल में दिए गए सारे अंकों को जोड़ डालते हैं। दूसरी तरफ ऐसे बच्चे भी होते हैं जो घटाने के सारे सवालों को पूरक जोड़ के सवाल के रूप में बदल देते हैं। मसलन, वे '13 में 7 घटाओ' को '7 में क्या जोड़ने से 13 आएगा' के रूप में देखते हैं। मन में हिसाब करते हुए हममें से कई लोग इस तरीके का सहारा लेते हैं, मसलन 391–180 पता करने के लिए हम जोड़ कर 180 को 200 बना लेते हैं, और फिर 391 तक ले जाते हैं। यानी 391–180 = 20 + 191 हो जाता है।

E5) 'तुलना' और 'पूरक जोड़' के सवालों में क्या अंतर है ?

E6) ऊपर दिए गए चार किस्मों का एक–एक ऐसा इबारती सवाल बनाएँ जो बच्चों की दुनिया से संबंधित हो?

आइए अब यह देखें कि घटाने की क्षमता विकसित करने में हम बच्चों की मदद कैसे कर सकते हैं। जोड़ की तरह घटाने से भी बच्चों का परिचय परिचित वस्तुओं के संदर्भ में ही कराया जाना चाहिए। बच्चों को 5 लड्डू में से 3 लड्डू घटाने ('निकालने', 'हटाने', 'कम करने') को कहा जा सकता है। इसी प्रकार से 5 चपातियों में से 3 चपातियाँ, 5 कंकड़ों में से 3 कंकड़, 5 तीलियों में से 3 तीलियाँ, वगैरह घटाने को कहा जा सकता है। इस तरह के काफी अभ्यास के बाद वे यह समझने लगेंगे कि 5 में से 3 निकालने पर 2 बचते हैं।

संबंधित भाषा से बच्चों को वाकिफ कराने के लिए यह किया जा सकता है कि जब क्रिया की जा रही हो तब हम साथ–साथ उससे जुड़े विभिन्न शब्द दुहराते जाएँ। ऐसी कहानियाँ और और खेल भी सोचे जो सकते हैं जिनमें घटाने से संबंधित शब्दों को उपयोग होता हो। हमें एक शिक्षक ने सुझाया कि निम्नलिखित जैसी कहानियाँ मददगार हो सकती हैं–

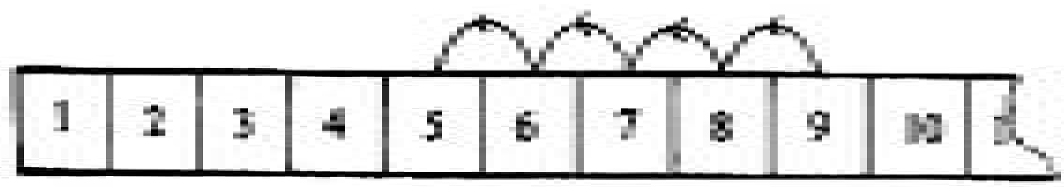
'राजू के 9 दोस्त थे। सभी को उसने अपने जन्मदिन की पार्टी पर बुलाया। लेकिन मुन्नी और पप्पू ने कहीं और जाना था, इसलिए उन्होंने मना कर दिया। तो **9 घटा 2,** यानि 7 दोस्त पार्टी पर आए।'

जरा बड़े बच्चों के लिए कहानी में और कुछ भी जोड़ा जा सकता है। मसलन, 'पार्टी में किसी वजह से 3 और दोस्त नहीं जा सके। तो कितने लोग आ रहे हैं, यह गिनने के राजू ने **7 में से 3 घटा दिया।'** को ऊपर की कहानी में जोड़ सकते हैं।

हम बच्चों के लिए कुछ घटा संबंधी खेल भी बना सकते हैं, जिनमें उन्हें घटाने की क्षमता विकसित करने के अवसर मिलें। ऐसा करते हुए हमें यह ध्यान देना चाहिए कि बच्चे हर संदर्भ में इस्तेमाल होने वाली शब्दावली पर ध्यान दें। जैसे, आप बच्चों को दो टोलियों में बांट सकते हैं। एक टोली कोई घटा–तथ्य बोले और दूसरी टोली उसके अनुरूप इबारती सवाल बनाए। मसलन, यदि एक टोली बोलती हे 7–3 =4, तो दूसरी टोली कह सकती है, ''यदि मुन्नी और मुन्ना के पास कुल 7 पेंसिलें हैं और मुन्नी के पास 3 हैं, तो मुन्ना के पास कितनी पेंसिलें हैं?'', आदि।

E7) घटाने की क्षमता विकसित करने में बच्चों की मदद करने के लिए एक खेल लिखिए।

घटाने का अभ्यास करने में बच्चों की मदद के लिए **संख्या पट्टी (number strip)** का भी इस्तेमाल किया जा सकता है। इसकी मदद से उल्टी तरफ से गिनने की क्षमता का विकास किया जा सकता है। मसलन, 9 में से 4 घटाने का मतलब यह होगा कि पहले आगे बढ़ते हुए 9 तक गिनें और फिर 4 खाने वापिस जाएं और देखें कि आप कहाँ हैं।




चित्र 3 : संख्या पट्टी की मदद से 9–4 बताना।

एक बार बच्चों को घटाने की प्रक्रिया समझ में आ जाए, तो आप उन्हें घटाने का संकेत बता सकते हैं। यहाँ भी जरूरी होगा कि शब्द 'ऋण' तथा प्रतीक '–' से पहचान स्थापित करने के लिए उन्हें बारम्बार इनका उपयोग करने करने का अवसर मिले।

जैसा कि हम पहले देख चुके हैं, बच्ची के लिए घटाना तब ज्यादा आसान होता है जब वास्तविक चीजों का इस्तेमाल किया जाता है। वह निश्चित संख्या में चीजें अलग कर देती है और शेष बची चीजों को गिन लेती है। या वह कई सारी खड़ी रेखाएं खींचकर उनमें से जितने को घटाना है, उन्हें काटकर बाकी को गिन सकती है। वह चाहे तो संख्या पट्टी पर उल्टी तरफ से गिनती भी कर सकती है। लेकिन, अगर इनमें से

किसी चीज की मदद के बगैर ही घटाने की संक्रिया शुरू की जाए, तो शायद उसे '13 में से 8 घटाओ' जैसे सवाल करने में भी मुश्किल होगी।

E8) आप बच्चों को 15–8 जैसे सवालों को हल करना किस तरीके से सिखाते रहे हैं ?

E9) 8 साल व उससे बड़े बच्चों को घटाने के कुछ सवाल दीजिए। नोट कीजिए कि वे इन सवालों को हल करने के लिए कौन–कौन से तरीके अपनाते हैं। यह भी पता करने की कोशिश कीजिए कि इन्हें हल करते वक्त वे किन दिक्कतों का सामना करते हैं।

जोड़ व घटा की अवधारणाओं का आपस में गहरा संबंध है। आइए यह देखें कि इन अवधारणाओं को सिखाने में इस संबंध से कैसे फायदा उठाया जा सकता है।

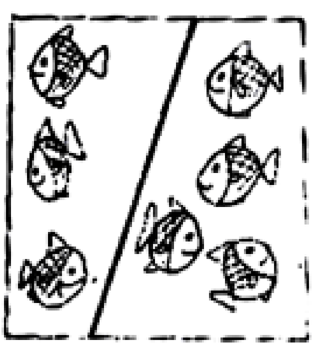
## जोड़ने व घटाने का सम्बन्ध

बच्चों को जोड़ व घटा समझने में मदद करने के लिए ज़रूरत इस बात की है कि वे ऐसे अनुभवों से गुज़रे जिसमें जोड़ने या घटाने की ज़रूरत पड़ती हो। इस मामले में हमने कुछ ऐसे लोगों से चर्चा की जो यह समझने की कोशिश करते हैं कि बच्चे गणितीय अवधारणाएं किस ढंग से सीखते हैं। हमारे सवालों के जवाब में उनमें से एक व्यक्ति ने बताया कि वह कैसे बच्चों को जोड़ व घटा सिखाता है।

**उदाहरण 2 :** रजा कुछ वर्षों से एक प्राइमरी स्कूल में सिखाने के कई तरीके आज़माता रहा है। उसके मुताबिक बच्चों को पहले खिलौने, या खाने की चीजों, या उनके आसपास पाई जाने वाली चीजों, आदि की छोटी संख्याएं जोड़ने को कहा जाना चाहिए। इस तरह के काफ़ी अभ्यास करने के बाद उन्हें घटाने की समझ बनाने में मदद दी जा सकती है। और जब वे घटाना सीख रहे हों, तब जोड़ने व घटाने की संक्रियाओं के परस्पर संबंध भी उनको स्पष्ट हो जाने चाहिए।

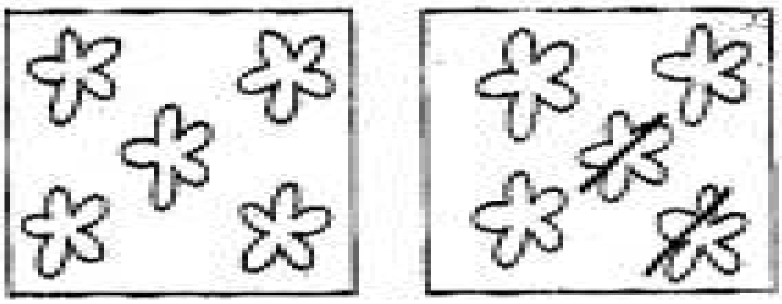
उसने पाया कि जानी–पहचानी चीजों को जोड़ने के काफ़ी अनुभव के बाद वे सीख जाएंगे कि, 3 कंचे और 2 कंचे मिलाकर 5 कंचे होते हैं। इसी तरह के अभ्यास से वे यह भी समझ जाएंगे कि यदि 5 कंचो में से 3 कंचे हटा दिए जाएं तो शेष कितने बचेंगे। इसके बाद वह गतिविधियों से इन दो संक्रियाओं के संबंध को जोड़ने की कोशिश करता है। जैसे वह उन्हें 3 लड्डू और 2 लड्डू देकर पूछता है कि उनके पास कुल कितने लड्डू हुए। इसके बाद वह उनसे कहता है कि 5 में से 2 लड्डू अलग कर दें और बताएं कि उनके पास कितने बचे (बशर्ते कि तब तक बच्चे कुछ लड्डू खा न गए हों!) यही गतिविधि वह नाना प्रकार की वस्तुओं के साथ करता है– टॉफियां, चम्मच, गेंद, आदि–आदि। इस तरह से बच्चे 'निकालने ' का मतलब समझने लगते हैं और इसका संबंध 'जोड़' से बनाने लगते हैं।

जब बच्चे थोड़ी–थोड़ी चीजों के संदर्भ में इन अवधारणाओं का अभ्यास कर चुकते हैं, तब वह उनका परिचय जोड़ के संदर्भ में चित्रात्मक प्रस्तुति से कराता है (चित्र 4 में)। साथ ही साथ, वह बच्चों को ' + ' प्रतीक भी बताता है।



चित्र 4 : जोड़ने के लिए चित्र कार्ड

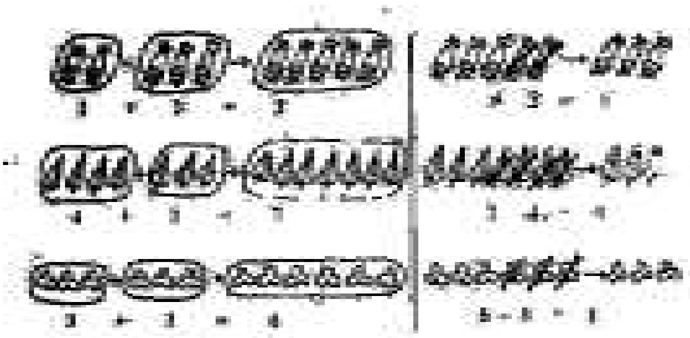
ऐसे चित्रों व प्रतीकात्मक निरूपण के अभ्यास के बाद, वह यही किया घटाने के संदर्भ में करता है। इसके लिए वह पहले उन्हें चित्र 5 (क) जैसा कोई चित्र दिखाकर पूछता है, "कुल कितनी चीज़ें हैं?" फिर उनके सामने ही वह कुछ चीज़ों को जैसे 2 चीज़ों को, काट देता है (चित्र 5(ख) देखिए ) और पूछता है, "यदि मैं दो चीज़ें निकाल दूं , तो कितनी बचीं?'' साथ ही साथ चित्र के नीचे वह लिख देता है 5 − 2 = 3.



चित्र 5 : घटाने के लिए चित्र कार्ड

हाँ, यह ज़रूर है कि इस तरह के अभ्यास बार–बार, अलग–अलग तरह से करने होंगे ताकि बच्चे संबंधित भाषा व प्रतीकों के आदी हो जाएं।

इस चरण पर जोड़ने व घटाने का अभ्यास करवाने के लिए वह बच्चों को चित्रात्मक वर्कशीट भी देता है (देंखे चित्र 6)।



चित्र 6 : एक वर्कशीट का हिस्सा

बच्चे जोड़ने की अवधारणा को सीख पाए हैं या नहीं, यह देखने के लिए वह उनसे 6–4 =2 जैसे तथ्य को चीजों के इस्तेमाल से या चित्रात्मक रूप से प्रदर्शित करने को भी कहता है। वह उनसे जोड़ने/घटाने के इबारती सवाल भी हल करवाता है। ये सवाल बच्चों की दुनिया से संबंधित होते हैं और वह उन्हें बहुत सरल व स्पष्ट शब्दों में प्रस्तुत करता है।

E10) रजा के तरीके के किन पहलुओं से आप असहमत हैं, और क्यों?

जो बच्ची कुछ चीजों के या चित्रात्मक संदर्भ में जोड़–घटा कर सकती है, वह इस मुकाम से आगे अमूर्त चरण की तरफ काफी धीमे–धीमे जाएगी। **उसे अपने उत्तर की पुष्टि के लिए और अपनी समझ को सुनिश्चित करने के लिए बारंबार ठोस चीजों या चित्रों का सहारा लेने की जरूरत पड़ती है।** उसे जोड़ने–घटाने का अभ्यास सार्थक संदर्भों में कई बार करना होगा। मसलन, मेज सजाते हुए, पैसे का लेन–देन करते हुए, सफर के समय सामान की निगरानी करते हुए, आदि परिस्थितियों में उसे जोड़ने–घटाने की जरूरत पड़ती है। इसके अलावा कंचे या लूडो जैसे खेल हैं जिनमें बच्चों को जोड़–घटा से संबंधित भाषा को इस्तेमाल करने का मौका मिलता है। इसी प्रकार से किसी 7 वर्षीय बच्चें को सांप–सीढ़ी खेलते वक्त

इस तरह के सवालों का जवाब देना काफी रूचिकर लगेगा कि ''कितने खाने ऊपर चढ़े ?'', या ''कितने खाने नीचे खिसके ?''। लेकिन ऐसी स्थिति में बच्ची से सवाल हल करवाते वक्त सावधानी यह रखनी होगी कि हम **धैर्य से काम लें, जवाब की जल्दी न करें।** उसे यह समझने का वक्त दें कि उसे करना क्या है। उसे उस प्रक्रिया के बारे में बोलने दीजिए, जिससे वह गुजर रही है। उसे धीरे–धीरे अपनी समझ बनाने दें। इससे उसमें जोड़ने/घटाने की अपनी क्षमता को लेकर आत्म विश्वास आएगा। इससे उसे यह समझने में भी मदद मिलेगी कि जोड़ना–घटाना स्वाभाविक क्रियाएँ हैं, अजनबी बातें नहीं।

चित्र – 7 बच्चे जोड़–घटा का अभ्यास करते हुए।

आजकल बच्चों को इबारती सवालों से तभी वास्ता पड़ता है जब वे जोड़ने और घटाने के औपचारिक सूत्रों को 'सीख' चुके हों। और तब उनसे जो सवाल पूछे जाते हैं, उनमें से अधिकतर बहुत पेचीदा और बच्चों की दुनिया से हटकर होते हैं।

उदाहरण के लिए कक्षा 3 के बच्चों को 'अधिकारियों के वेतन' और 'विविध मद' सम्बन्धी सवाल दिए जाते हैं। ये शब्द ही बच्चों के लिए अनसुने होते हैं। साथ ही, बच्चे यह भी जानते हैं कि शिक्षक 'सही उत्तर' चाहते हैं। आम शिक्षक बच्चों को इस बात के लिए प्रोत्साहित नहीं करते कि वे पूरा समय लगाकर सवाल में दी गई स्थिति को समझ सकें, और यह भी समझ सकें कि क्या किया जाना है। लिहाजा सवाल को समझने या उसका विश्लेषण करने की बजाय बच्चे सवाल में क्या किया जाना है। यदि सवाल में बच्ची को 'और कितने' शब्द नजर आ जाएं तो वह तुरन्त दी गई सख्यांओं को जोड़ देगी क्योंकि उसके लिए 'और' शब्द जोड़ का संकते है, हालांकि हो सकता है कि सवाल का उत्तर निकालने के लिए जरूरत घटाने की रही हो।

इसलिए यह जरूरी है कि लगभग शुरू से ही बच्चों को सोच समझकर सरल शब्दों में दिए गए इबारती सवालों का अभ्यास कराया जाए। जैसे–जैसे बच्ची अवधारणाओं से परिचित होती जाए वैसे–वैसे सवालों को ज्यादा पेचीदा बनाया जा सकता है। जोड़ के वृद्धि किस्म के सवाल एकत्रीकरण किस्म के सवालों के काफी बाद करवाए जा सकते हैं। दरअसल, कुछ लोगों का मानना है कि वृद्धि किस्म के सवाल तो घटाने के विभाजन व तुलना मॉडल के सवालों के बाद ही करवाना उचित होगा।

E11) अभ्यास E4 व E6 में अपने द्वारा बनाई गई उदाहरणों की सूची को देखिए। हर उदाहरण के सामने लिखिए कि बच्चों की समझ के किस चरण पर आप उनके सामने वह सवाल रखेंगे।

E12) जब बच्ची कोई सवाल हल कर रही हो, तब शिक्षक के लिए कौन–सी बात ज्यादा अहमियत रखती है – बच्ची जिन मानसिक प्रक्रियाओं से गुजर रही है, या सही उत्तर, या दोनों ही ? अपने उत्तर का कारण भी दीजिए।

जब बच्चे जोड़ने व घटाने की अवधारणाएं समझ चुके हों, तब ज़रूरत होगी कि वे इन संक्रियाओं का कुशलता के साथ इस्तेमाल करना सीखें । हम सभी जानते हैं कि 1 + 1 = 2, 3 – 2 = 1 या 4 + 3 = 7 जैसे जोड़–बाकी तथ्य याद हों, तो जोड़–घटा के सवालों को जल्दी से करने में मदद मिलती है । निम्नलिखित गतिविधियों के ज़रिये बच्चे इन तथ्यों को दिलचस्प तरीके से दोहरा सकेंगे, और इस तरह इनको अपने मन में ठीक से बैठा पाएंगे ।

- 10 – 10 बच्चों की टोलियां बनाएं । ब्लैकबोर्ड पर जोड़ने– घटाने के अधूरे कथन लिख दें । कॉलम उतने ही हों जितनी टोलियां हैं तथा हर कॉलम में दस–दस सवाल हों । मसलन, अगर 5 टोलियां हैं, तो आप निम्नलिखित कॉलम बना सकते हैं ।

| I | II | III | IV | V |
|---|---|---|---|---|
| 2 + 3 = ☐ | 1+ 7 = ☐ | 5 – 2 = ☐ | 6+3 = ☐ | 7 – 4 = ☐ |

टोली नम्बर 1 कॉलम I के सवालों के जवाब दे टोली नम्बर 2 कॉलम II के सवाल करें, वगैरह । जैसे ही शिक्षक 'शुरू' कहें, वैसे ही हर टोली की पहली बच्ची ब्लैकबोर्ड पर आप और अपने कॉलम की पहली समीकरण पूरी करे । इसके बाद हर टोली की अगली बच्ची आकर अगला सवाल करे । इसके बाद अगला सवाल हल करे। जो टोली दसों सवाल सही–सही हल करे, वह विजेता।

बड़े बच्चों के लिए समीकरण ज़्यादा ऊंचे स्तर की समझ को आजमाने के लिए बदले जा सकते हैं । मसलन आप इनमें पूरक जोड़ और घटा के ऐसे सवाल जोड़ सकते हैं :

5 – ☐ = 2  और  ☐ + 3 = 5

- आप बच्चों को ए और बी, दो टोलियों में बांट सकते हैं । बी टोली की एक बच्ची जोड़–बाकी का एक अधूरा कथन ब्लैकबोर्ड पर लिखें (जैसे 3 + 7 = ..........) और ए टोली के किसी सदस्य से उसे पूरा करने को कहे। यदि वह उसे सही–सही पूरा कर दे तो ए टोली को 1 अंक मिलेगा। यदि वह नहीं कर पाती, तो बी टोली को 1 अंक मिलेगा। जिस टोली को अंक मिले वह अब एक और अधूरा जोड़–बाकी कथन ब्लैकबोर्ड पर लिखे और दूसरी टोली के किसी बच्चे से उसे पूरा करने को कहे। खेल का रूप तथा अंक देने का तरीका आप जो सिखाना चाहते हैं उसके अनुरूप बदल सकते हैं। अहम् बात यह है कि बच्चे अभ्यास गतिविधि में मगन हो सकें, और उन्हें मजा भी आए।

- ब्लैकबोर्ड पर तालिका 1 और 2 में दर्शाए अनुसार अधूरे जोड़ या बाकी का चार्ट बनाइए।

आप बच्चों को समझा दें कि चार्ट का उपयोग कैसे करना है। अब बच्चे एक–एक करके आएं और चार्ट की कतारों व कॉलमों को देखकर एक–एक खाना भरते जाएं।

- जोड़ बाकी का कुछ अभ्यास संख्या पट्टी के जरिए (चित्र 3) भी किया जा सकता है।

इनमें से हर गतिविधि में बच्चों से कहें कि वे जो भी जोड़–बाकी तथ्य पेश कर रहे हैं, उसे प्रतीकों के रूप में स्पष्ट तरीके से बोलें और लिखें।

E13) उपरोक्त गतिविधियों के अलावा कोई गतिविधि सुझाइए जिससे बच्चों को जोड़/बाकी तथ्यों को सीखने में मदद मिले।

## ऐल्गोरिद्म इस्तेमाल करने की समस्याएँ

हमेशा बच्चों से अपेक्षा की जाती है कि वे संख्याओं को जोड़ने व घटाने के ऐल्गोरिद्म को मशीनी रूप से

लागू करें, चाहे वे उनमें शामिल प्रक्रियाओं को समझे हों या नहीं। ऐसे में होता यह है कि बच्चे इन नियमों को लागू करने में गलतियाँ करते हैं। आखिरकार, बच्चे ऐसे तर्कहीन (उनके हिसाब से) नियमों को कितना व कब तक याद रख सकते हैं?

जरा गलतियों के कुछ नमूने देखिएः

$$\begin{array}{r} 205 \\ -\ 21 \\ \hline 224 \\ \hline \end{array}$$

इन गलतियों के कारण क्या है? हो सकता है कि

i) बच्चे संबंधित संक्रिया को नहीं समझ पाए हैं, और/या

ii) वे दो या दो से अधिक अंकों की संख्यांक लिखने का तर्क नहीं समझ पाए हैं, और/या

iii) वे पुनर्समूहीकरण (यानी हासिल–उधार) नहीं समझे हैं।

हमें यह भी नहीं भूलना चाहिए कि कई समस्याएं इसलिए उत्पन्न होती है क्योंकि बच्चे को **शून्य की अवधारणा स्पष्ट नहीं होती।** इसका कारण यह हो सकता है कि उसे यह बताया गया है कि 'शून्य' का मतलब 'कुछ नहीं' होता है। शायद इसी कारण से 205 जैसी गलतियाँ होती है।

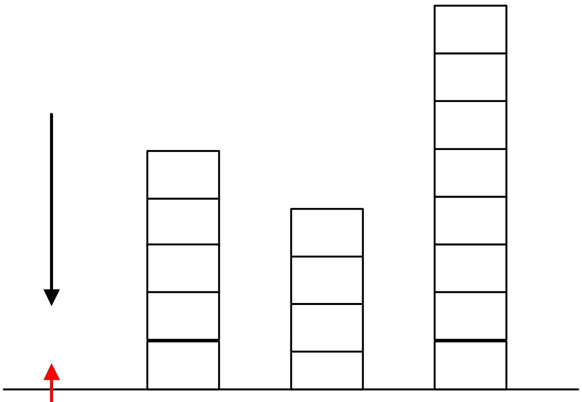
तो हम इस स्थिति में सुधार कैसे कर सकते है ? पिछले भागों में हमने उन तरीकों की बात की थी जिनके इस्तेमाल से बच्चों को जोड़–घटा की संक्रियाएँ व संबंधित भाषा सीखने में मदद मिल सकती है।

पुनर्समूहीहरण के संदर्भ में, जरा यह देखें कि 8 वर्षीय राधा को 'उधार' की अवधारणा सीखने में किसी तरह मदद दी गई थी।

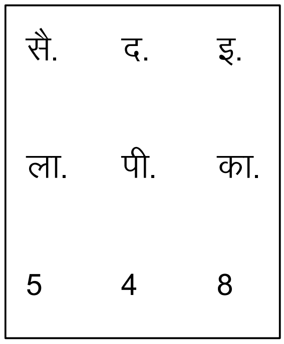
**उदाहरण 3 :** एक साल पहले कक्षा 2 में राधा के शिक्षक ने इकाई/दहाई/सैकड़ा की अवधारणा कई गतिविधियों के माध्यम से समझाई थी। परंतु राधा उस समझ का उपयोग अब 'हासिल' और 'उधार' वाले सवालों में नहीं कर पा रही थी। उसकी मदद के लिए मैंने उसके साथ एक खेल खेलने की सोची।

मेरे पास कार्ड बोर्ड के कुछ वर्गाकार (1 वर्ग इंच) टुकड़े थे – 15 काले, 15 पीले और कुछ लाल। मैंने राधा से कहा कि हम इनसे एक खेल खेलेंगे। एक कागज पर मैंने 9 इंच की दूरी पर दो आड़ी समान्तर रेखाएँ खींच दीं। फिर मैंने उसे समझाया कि हम इन वर्गाकार टुकड़ों से संख्याएँ कैसे दर्शाएंगे – काले टुकड़े इकाईयों की संख्या दर्शाएंगे, पीले टुकड़े दहाई और लाल टुकड़े सैकड़ों की संख्या दर्शाएंगे और सबसे दाएँ कॉलम में इकाइयाँ होंगी, अगले कॉलम में दहाई और तीसरे कॉलम में सैकड़ा की संख्या होगी। मैंने उसे कुछ उदाहरण भी दिखाए (चित्र 8 (क) देखें)।

शुरूआती हिचक के बाद वह इस तरह के प्रदर्शन से परिचित हो गई। हर बार जब वह कोई संख्यांक दर्शाती, तो मैं उससे कहती कि वह संख्या को दर्शाने के लिए लाल, पीले, काले टुकड़ों की संख्या को तीन कॉलम वाली तालिका में लिखे। तालिका के प्रत्येक कॉलम के शीर्ष पर क्रमशः ला., पी., और का. लिखा हो (ला., लाल के लिए, वगैरह)। मैनें उसे ला., पी. और का. के ऊपर सै., द., इ. भी लिखने को कहा, जैसा कि चित्र 8 (ख) में दिखाया गया है।



चित्र 8 : 548 का प्रदर्शन – (क) कार्डों से,




(ख) दशमलव प्रणाली में

अब मैंने उसे बताया कि खेल का एक नियम यह है कि हम रेखाओं को पार नहीं कर सकते। इसका मतलब यह हुआ कि हर कॉलम में हम 9 टुकड़े ही रख सकते हैं।

**मैं** : क्या हमें किसी कॉलम में 9 से ज्यादा टुकड़ों की जरूरत होगी ?

**राधा** : हाँ।

**मैं** : अच्छा, कोई संख्या सोचो जिसमें तुम्हें एक कॉलम में 9 से ज्यादा टुकड़े लगेंगे। (थोड़ी देर सोचने के बाद में उसे अपनी गलती का अहसास हो गया।)

**राधा** : नहीं, 9 के बाद हम दहाई पर चले जाते हैं।

**मैं** : शाबाश! और दहाई के कॉलम में क्या होगा ? क्या उसमें तुम्हें नौ से ज्यादा पीले टुकड़े लगेंगे?

**राधा** : नहीं, तब हम सैकड़ा के कॉलम में चले जाएंगे।

**स्पाइक अबेकस (spike abacus)** के इस घरेलू रूप के साथ हम थोड़ी देर और खेले। इसके बाद हमने इस साधन का उपयोग करते हुए दो संख्याओं का जोड़ शुरू किया। शुरूआत 15 + 21 से की। पहले तो वह ठीक से समझ नहीं पा रही थी कि इसे कैसे करे। जब उसे कुछ संकेत दिए तो उसने सोचा कि दो कागजों का इस्तेमाल करेगी। – एक 15 दर्शाने के लिए और दूसरा 21 के लिए। फिर थोड़ा सोचने के बाद और थोड़ी बातचीत के बाद उसने 21 के काले टुकड़े को 15 के पांच काले टुकड़ों के ऊपर रख दिया, और दो पीले टुकड़ों को 15 के एक पीले टुकड़े के ऊपर। उसे वही जवाब मिला जो वह चाहती थी।

यहाँ तक तो ठीक चला। ऐसे कुछ और अभ्यास करने के बाद हम उन स्थितियों की ओर बढ़े जहाँ लेन–देन (हासिल–उधार) जरूरी हो। मसलन, 15 + 16 में। पहले उसने 15 और 16 को अलग–अलग दर्शाया। फिर उसने 16 के 6 काले टुकड़ों को 15 के 5 काले टुकड़ों के ऊपर रखा और 16 के पीले टुकड़े को 15 के पीले टुकड़े के ऊपर रख दिया।

**मैं** : लेकिन तुम्हारे काले टुकड़े तो ऊपरी रेखा को पार कर गए हैं। इसके बारे में क्या करोगी?

**राधा** : हाँ, हाँ, याद है। मैं इनमें से दस हटाकर उसकी जगह एक पीला टुकड़ा रख सकती हूँ।

**मैं** : शाबाश! यानी तुम 10 काले टुकड़ों के बदले एक पीला टुकड़ा रख सकती हो। दस इकाई के बदले एक दहाई। तो तुम दहाई के कॉलम में एक और दहाई जोड़ होगी। इसका मतलब है कि तुम दहाई कॉलम में **1 हासिल करोगी।**

यह करने के बाद उसने लिख लिया कि अब उसके पास कितने काले और कितने पीले टुकड़े हैं। बस, उत्तर

आ गया 31. मैंने उससे कहा कि अब तक हमने जो कुछ किया उसे उसी तरह लिखेंगे जिस तरह हमने संख्याओं को लिखा था। शुरू में कुछ मदद के बाद उसने यह काम कर डाला, जैसा कि नीचे दिखाया गया है।

| सै. | द. | इ. | |
|---|---|---|---|
| ला. | पी. | का. | |
| | 1 | 5 | |
| — | 1 | 6 | |
| | 2 | 11 | = 2 पीले + 11 काले = 2 पीले + 1 पीला + 1 काला |
| | 3 | 1 | = 3 पीले + 1 काला |

हमने इस तरह के कई और अभ्यास किए ताकि वह ठोस प्रस्तुति को अमूर्त ऐल्गोरिद्म से जोड़ना सीख पाए।

इसके बाद हमने ऐसे सवाल उठाए जिनमें लाल टुकड़ों, यानी सैकड़ा, की जरूरत पड़े। हमने 57 + 66 जैसे कई सवाल किए, और जो कुछ किया उसे साथ–साथ लिखते गए। उसे तीन अंकों की संख्याओं के साथ 'हासिल' की बात पकड़ने में देर न लगी।

यह काम करते हुए मैं उससे लगातार पूछती जाती थी कि मुझे समझाए कि वह क्या कर रही है। जल्दी ही मैने देखा कि वह संबंधित गणितीय भाषा का इस्तेमाल काफी सहजता से करने लगी है।

कुछ दिनों बाद हमने इस गतिविधि को थोड़ा और आगे बढ़ाया। फिर + 25 जैसे सवाल बगैर वर्गाकार टुकड़ों के किए। धीरे–धीरे वह दो अंकों का कोई भी जोड़ आसानी से करने लगी और 'हासिल' की अवधारणा की आदी हो गई।

E14) बच्चों को 'उधार' की अवधारणा समझने में मदद के लिए एक गतिविधि विस्तार में लिखिए।

इस खंड में हमने देखा कि जब बच्चे आँख मूंदकर किसी 'विधि' को बगैर समझे इस्तेमाल करते हैं तो किस तरह की गलतियाँ होती हैं। कई बार तो वे यह भी नहीं समझ पाते कि उनका उत्तर कितना उटपटाँग है। यदि वे मन में इतना अंदाजा भी लगा पाएं कि उत्तर क्या होना चाहिए तो वे समझ जाएंगे कि 'कहीं कुछ गड़बड़' जरूर है। तो उनकी अंदाजा लगाने की क्षमता का विकास कैसे करें? अब हम इसी सवाल का उत्तर देने की कोशिश करेंगे।

## अंदाजा लगाने का कौशल विकसित करना

पांच ग्रामीण स्कूलों के तीसरी व चौथी कक्षा के बच्चों के साथ एक अध्ययन यह जानने के लिए किया गया था कि वे मानक ऐल्गोरिद्मों को कितनी हद तक ठीक से समझते हैं। बच्चों को 1234 + 469 जैसे सवाल हल करने के लिए दिए गए। जवाब बहुत दिलचस्प थे। कई जवाब ऐसे थे :

$$\begin{array}{r} 1234 \\ +\ 469 \\ \hline 5924 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1234 \\ +469 \\ \hline 16913 \\ \hline \end{array}$$

खुद बच्चों को ऐसे उत्तरों पर कोई आश्चर्य नहीं हुआ। जाहिर है कि लगभग क्या उत्तर होना चाहिए उस का अंदाज लगा पाने की उनमें क्षमता नहीं थी। इसलिए उन्होंने खुद से यह सवाल ही नहीं किया कि ''क्या मेरा उत्तर ठीक लगता है?''।

उत्तर का अंदाजा लगाने की क्षमता महत्वपूर्ण क्यों हैं? क्या हम रोजाना इसका इस्तेमाल बारम्बार नहीं करते? मसलन, जब हम खरीददारी करने निकलते हैं और जल्दी से यह देखना चाहते हैं कि क्या चीजों की कुल कीमत हमारे बजट के अंदर रहेगी, तो क्या हम इसी क्षमता का उपयोग नहीं करते?

उत्तर का अंदाजा लगाने की क्षमता से गणितीय गलतियाँ पकड़ने में भी मदद मिलती है। कैल्कुलेटर (calculator) का इस्तेमाल करते वक्त भी, इस क्षमता से हमें यह जांच करने में मदद मिलती है कि कहीं हमने गलत बटन तो नहीं दबा दिया। नीचे दिए गए अभ्यास को करते वक्त कि दो संख्याओं की इकाइयाँ जुड़कर 2 बंडल से ज्यादा नहीं हो सकती, यानी 2 दहाइयों से ज्यादा नहीं हो सकती।

ऐसे ही कुछ और उदाहरणों के जरिए राजू धीरे–धीरे वह बात समझ पाया जो शीला, चाहती थी – कि दो अंकों की संख्या जोड़ते वक्त हम पहले उन संख्याओं के दहाई के अंकों को जोड़कर जोड़ा का अंदाजा लगा सकते हैं। जल्दी ही वह अमूर्त सवालों में इस कौशल का इस्तेमाल आसानी से करने लगा। अब उसे तीलियों के इस्तेमाल की जरूरत नहीं थी।

शीला ने उसे यह भी समझने में मदद दी कि कैसे अंदाजा लगाने का इस्तेमाल करके वह यह जांच कर सकता है कि गणना से उसे जो उत्तर मिला है, वह सही लगता है या नहीं। उसने कई उदाहरणों के माध्यम से इस बात को दर्शाया । इसके बाद शीला ने उसे कुछ सवाल दिए और उनके लगभग उत्तर तथा ठीक उत्तर दोनों निकालने को कहा।

अपने इस अनुभव से शीला यह समझ गई कि किसी बच्ची में यह क्षमता विकासित होने के लिए जरूरी है कि वह बारम्बार इसका अभ्यास करती रहे। इसलिए वह अक्सर राजू को ऐसे सवाल देती रहती है कि 'यदि वह 60 रूपये लेकर बाजार जाए, तो क्या वह 35 रूपये की किताबें और 17 रूपये की पेंसिलें खरीद पाएगा?''।

E16) दो या दो से ज्यादा अंकों वाली संख्याओं के अंतर का अंदाजा लगाना सीखने में बच्चों को मदद देने के लिए आप किस तरीके का इस्तेमाल करेंगे?'

अंदाजा लगाना एक ऐसा कौशल है जिसे कई संदर्भों में विकसित करना होता है।

## सारांश

इस पाठ में हमने निम्नलिखित बातों पर चर्चा की:

1) बच्चों को जोड़ने व घटाने की संक्रियाओं का अर्थ समझाने के कुछ तरीके।
2) जोड़ने व घटाने से संबंधित इबारती सवालों की अलग–अलग किस्में जो बच्चों के सामने आती हैं।
3) लगभग शुरू से ही बच्चों को इबारती सवाल करवाने का महत्व।
4) जोड़ने/घटाने के ऐल्गोरिद्मों का उपयोग करते वक्त बच्चे गलतियाँ क्यों करते हैं।
5) इन दो संक्रियाओं में 'हासिल' व 'उधार' की अवधारणा समझने में बच्चों की मदद कैसे करें।
6) संख्याओं के योग/अंतर का अंदाजा लगाने की क्षमता बच्चों में कैसे विकसित करें।

# पाठ–7

# गुणा और भाग करना

## परिचय

कक्षा 5 के बच्चे को यह सवाल दिया गया; ''यदि 30 पेंसिल बॉक्सों की क़ीमत 60 रुपये है, तो एक पेंसिल बॉक्स कितने का होगा?'' उसने उत्तर दिया कि एक पेंसिल बॉक्स 60×30 = 1800 रुपये का होगा। इस तरह के और भी कई बच्चे सवालों को हल करते हैं।

ये हालात क्यों बने? इस प्रश्न का उत्तर देने के लिए हमें अपने सिखाने के तरीक़ो की गहराई से छानबीन करनी होगी । पिछली इकाई में हमने जोड़–बाकी के संदर्भ में इस तरह की छानबीन की थी। इस इकाई में हम बच्चों को गुणा व भाग के विभिन्न पहलुओं को समझाने के कुछ तरीक़े सुझायेंगे। आप इन तरीक़ों को पूरी तरह अपना सकते हैं, या इनमें सुधार करके अपना सकते हैं या इन्हें नामंज़ूर कर सकते हैं।

सबसे पहले हम बच्चों को गुणा से परिचित कराने के तरीक़ों पर ग़ौर करेंगे। जोड़ व बाक़ी की तरह गुणा का उपयोग भी रोज़मर्रा के जीवन में काफ़ी होता है। जैसे, अगर हम 5 रुपये किलो के भाव से 10 किलोग्राम चावल ख़रीदें, तो हम गुणा करके ही पता करते हैं कि कुल कितना भुगतान करना हैं या जब 50 लोगों के लिए खाने का इन्तजाम करना हो, तो हम कुल ख़र्च का अन्दाजा लगाने के लिए गुणा का ही सहारा लेते हैं। इसी तरह के आप कई और उदाहरण जानते होंगे। पहले दो भागों में हम देखेंगे कि कैसे बच्ची के रोज़मर्रा के अनुभवों के ज़रिए हम उसे यह समझा सकते हैं कि गुणा क्या होता है और कहाँ–कहाँ लागू किया जा सकता है।

हम उन समस्याओं पर ग़ौर करेंगे जो पहाड़ों को बिना समझे रटने की वजह से उत्पन्न होती हैं। कुछ लोग मानते हैं कि बच्चों को पहाड़े इसलिए रटवाए जाते हैं ताकि वे गुणा के बुनियादी तथ्य दिमाग़ में बैठा लें, और जब भी ज़रूरत हो तब तुरंत इनका उपयोग कर सकें। इस भाग में हम चर्चा करेंगे कि क्यों इस लक्ष्य तक पहुंचने के लिए तोतारटन्त उपयोगी नहीं है। ज़रूरत दरअसल इस बात की है कि बच्चों के लिहाज़ से सार्थक व दिलचस्प ढंग से गुणा के तथ्य बारम्बार दोहराए जाएं।

हम उन समस्याओ ंकी चर्चा करेंगे जो गुणा का ऐल्गोरिद्म सिखाने के आम तरीके की वजह से उत्पन्न होती हैं। जब बच्चे मशीनी ढंग से सवाल हल करते हैं, वे यह समझ नहीं पाते कि वे जो कुछ कर रहे हैं, उसका अर्थ क्या है, और इसलिए उनके उत्तर अपेक्षित उत्तर से कोसों दूर होते हैं। दरअसल जरूरत इस बात की है कि बच्चे तथ्यों से आगे भी कुछ सीखें, और कुछ दी गई संख्याओं पर ऐल्गोरिद्म लागू करने की क्षमता से ज्यादा कुछ हासिल कर पाएं। हम इस दृष्टि से बच्चों की मदद करने के कुछ तरीकों पर विचार करेंगे।

कई लोग भाग को गणित की चार बुनियादी संक्रियाओं में सबसे मुश्किल मानते हैं। हम भाग की चर्चा से शुरूआत करेंगे। हम यहाँ भाग से संबंधित ऐसे इबारती सवालों भाग से जुड़े शब्दों को सीखने में व भाग के ऐल्गोरिद्म के साथ यहाँ हमने यह भी बताया है कि यह सूत्र क्यों कारगर होता है।

इस पाठ में भी हमने ऐसी कई गतिविधियाँ शामिल की हैं जिनकी मदद से बच्चे इन अवधारणाओं को रूचिकर तरीके से सीख सकें।

## गुणा करने से पहले जानने योग्य बातें

आम भाषा में गुणा शब्द का अर्थ यह लगाया जाता है कि किसी चीज में 'काफी वृद्धि'। अंकगणित के संदर्भ में गुणा का अर्थ ज्यादा सटीक हैं। यहाँ भी इसका अर्थ वृद्धि से होता है, मगर कितनी वृद्धि, यह दी गई संख्याओं पर निर्भर करती है। गुणा की संक्रिया का मतलब यह होता है कि हम दी गई संख्या को निश्चित बार उसी में जोड़े। जैसे, 4 गुणा 3 का अर्थ 4+4+4 होता है। लिहाजा गुणा सिखाना शुरू करने से पहले

जरूरी है कि बच्चे कुछ हद तक जोड़ की संक्रिया जानते हों। लेकिन **यह कतई जरूरी नहीं है कि गुणा सीखने से पहले के जोड़ मे महारत हासिल कर चुके हों।** यदि वे जोड़ को लेकर परेशानी महसूस ना करते हों, और आसान संदर्भों में इसका अर्थ समझने लगे हों, तो गुणा सीखने की प्रक्रिया शुरू की जा सकती है। जोड़ सिखाना साथ–साथ जारी रहेगा, और इससे बच्चों को दोनों प्रक्रियाओं को समझने में मदद मिलेगी।

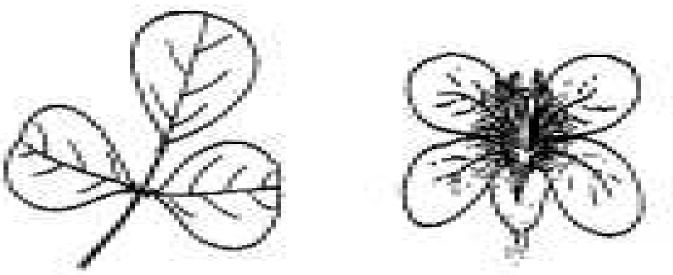
बच्चों को गुणा से परिचित कैसे कराएं? आमतौर से बच्चे इस अवधारणा का सामना पहली बार कक्षा 2 (6–7 वर्ष की उम्र) में असंबंधित तथ्यों की एक श्रृंखला के रूप में करते हैं। बच्चों को ये तथ्य याद कर लेने होते हैं। इसलिए 9 साल की बच्ची 28 X 3 हल करने के तुरंत बाद मुझे 29 X 3 नहीं बता पाई।

तो हम बच्चों को यह समझने में कैसे मदद करें कि गुणा का मतलब क्या होता है ? सबसे पहले तो हमारे सामने यह स्पष्ट होना चाहिए कि गुणा सीखने से पहले बच्चों को क्या–क्या जानना जरूरी है। जोड़ की समझ के अलावा बच्चों को **बराबर मात्रा के समूह बनाना** तथा **इन समूहों को जोड़ना** आना चाहिए। इसके बाद ही गुणा के औपचारिक रूप से बच्चों का परिचय कराया जाना चाहिए।

यहाँ हम बाकी की दो क्षमताएँ विकसित करने की चर्चा करेंगे।

## बराबर मात्रा के समूह बनाना

पहली या दूसरी कक्षा में पहुँचने तक बच्चों को चीजों की जोड़ियों के कई अनुभव हो चुके होते है। जैसे एक जोड़ी जूते, एक जोड़ी आँखें, कान, हाथ, पैर, पंख, आदि। उन्होंने तीन–तीन के समूह भी देख होंगे, जैसे तिपाये की तीन टांगे, पलाश के पत्ते (चि. 1 (क)), बिजली के पंखे की पत्तियाँ। या, यदि हम चार–चार के समूह की बात करें, तो वे सरसों के फूल की पंखुड़ियों (चित्र 1(ख)), मेज या कुर्सी की टांगों, कार के पहियों आदि को जानते होंगे। एक दी गई मात्रा के समूहों को इकट्ठा करने की बात समझाने के लिए आप उनसे ऐसे छोटी–छोटी संख्याओं वाले आमतौर पर दिखने वाले समूह पहचानने को कह सकते हैं। उनसे बीज, तिनके, मोती, कंचे आदि जुटाने को भी कहा जा सकता है। हर बच्ची (या बच्चों को समूह) अपने मनपसन्द बराबर मात्रा के समूह बनाए।



चित्र 1 : (क) पलाश के पत्तों का एक समूह, (ख) सरसों का फूल

इसी बात के लिए एक गतिविधि हो सकती है 'अंक कहानी' बताना। आप एक ऐसी काल्पनिक कहानी बना सकते हैं जिसमें दो–दो (या तीन–तीन, चार–चार ) के समूह नजर आएं। मसलन, आप कह सकते हैं कि, ''अब मैं तुम्हें 'दो' की कहानी सुनाता/सुनाती हूँ। कहानी सुनकर तुम्हें यह बताना है कि इसमें दो–दो के कितने समूह हैं।

इसी तरह की गतिविधि आप चित्रों के साथ भी कर सकते हैं। चित्र में कई चीजें (पक्षी, जानवर, वगैरह) अलग–अलग मात्रा के समूहों में हों। बच्चों से पूछ सकते हैं कि चित्र में दो–दो चीजों वाले समूह पहचानें, फिर तीन–तीन चीजों वाले समूह पहचानें।

E1) जब बच्चे बराबर मात्रा के समूहों को जोड़ते हैं, तो गुणा की शुरूवात होती हैं। आइए देखें कि बच्चों को यह क्षमता हासिल करने में मदद कैसे की जाए।

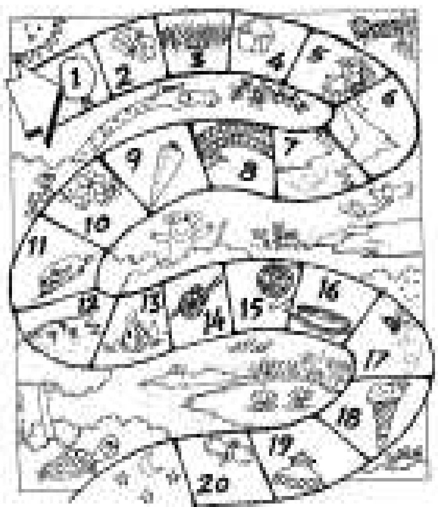
## बराबर मात्रा के समूहों को जोड़ना

जब बच्चे बराबर मात्रा के समूह बनाने का काफी अभ्यास कर लें, तब आप उनसे इनमें से कुछ समूहों को जोड़ने को कह सकते हैं। अब वे '3–3 कंचे वाली थैलियों में कुल कितने कंचे होंगे ?' जैसे सवालों को हल करने की कोशिश कर सकते हैं। धीरे–धीरे वे ज्यादा संख्या में बड़ी मात्राओं के बराबर समूहों का जोड़ना शुरू कर सकते हैं। मसलन, 6–6 चीजों वाले 5 समूहों का जोड़। इस तरह की गतिविधि करते हुए बच्चे धीरे–धीरे बराबर मात्राओं वाले समूहों को नियमित अंतर देकर क्रमानुसार गिनने लगते हैं। इसे **छोड़कर गिनना (skip counting)** कहते हैं।

बच्चे खेलों, कहानियों व अन्य गतिविधियों के जरिए छोड़–छोड़कर गिनने का अभ्यास कर सकते हैं। वे 'बच' खेल सकते हैं। इस खेल में बच्चे एक गोले में बैठ जाते हैं, और क्रम से गिनती बोलते हैं। एक बच्ची एक संख्या बोलती है। नियम यह है कि जिस बच्ची पर किसी पूर्व निर्धारित संख्या का गुणज आता है, वह संख्या बोलने के बजाए 'बच' कहती है। जैसे, अगर निर्धारित संख्या 4 है तो पहली बच्ची 1 कहेगी, दूसरी बच्ची 2 कहेगी, अगले बच्चे 3, 'बच', 5,6,7 और फिर 'बच' आदि कहेंगे। अगली बारी में कोई और संख्या जैसे 7, तय की जा सकती है। तब 7, 14 आदि संख्या के बदले 'बच' बोला जाएगा। धीरे–धीरे बच्चों के दिमाग में इन गैरहाजिर संख्याओं का एक पैटर्न बनने लगता है। बराबर मात्रा के समूहों की गिनती तथा 'बच' जैसी गतिविधियों से यह पैटर्न बनने में मदद मिलती है । इससे बच्चों को नियमित बराबर अंतर देकर गिनती करने की ओर बढ़ने में मदद मिलती है।

छोड़–छोड़कर गिनने का अभ्यास संख्या पट्टी से जुड़ी कहानियों से भी हो सकता है। इस पट्टी पर मान लीजिए क्रम से 1 से 50 तक गिनती हो। पट्टी पर विभिन्न चीजें भी बनाई जा सकती हैं। मसलन 1 पर पेड़, 2 पर तितली, आदि ,बनाई जा सकती हैं। आप इसमें मकान, पहाड़, नदी, आदि भी जोड़ सकते हैं। जैसे कि एक फुदकते खरगोश और उछलते मेंढक की कहानी बनाई जा सकती है। मेंढक हर बारी तीन घर ही उछल पाता हो और खरगोश हर बारी चार घर फुदक पाता हो। आप बच्चों से पूछ सकते हैं कि ये दोनों किन–किन संख्याओं पर मिल पाएंगे। चूँकि खरगोश 4 घर ही फुदकता है, उन्ही घरों पर जा सकता है जा 4 के गुणज हों। वह किसी अन्य घर पर पड़ी चीज ले नही सकता। वह मेंढक से कुछ ऐसी चीजें मंगवा सकता है जो मेंढक की पहुँच में है मगर खरगोश की पहुँच से बाहर है। बच्चों से पूछा जा सकता है कि ऐसी कौन–कौन सी चीजें हैं। 20 घरों की एक पट्टी चित्र 2 में दिखाई गई है।

आप इस कहानी के कई अलग–अलग रूप बनाकर बच्चों को अन्य प्रक्रियाओं का अभ्यास भी करा सकते हैं।




चित्र 2 : कहानीदार संख्या पट्टी का एक हिस्सा

E2) 1 से 50 या 100 तक के संख्या कार्डों को लेकर एक ऐसी गतिविधि बनाइए जिससे बच्चों को दिलचस्प ढंग से छोड़–छोड़कर गिनने का अभ्यास मिल सके।

E3) खुले में खेलने योग्य एक ऐसा खेल बनाइए जिससे बच्चों को पाँच–पाँच के अन्तर से छोड़–छोड़कर गिनने का अभ्यास करने में मदद मिले।

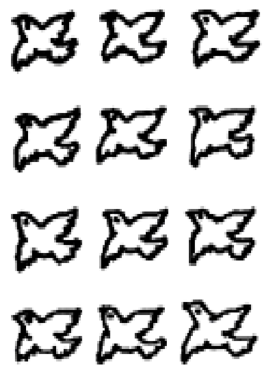
कई बराबर समूहों को गिनना या निर्धारित मात्रा में छोड़–छोड़कर गिनना वास्तव में एक ही बात है। इन दोनों का ही मतलब दो संख्याओं का गुणा करने से है। लिहाजा जब बच्चे बराबर मात्रा के समूहों को जोड़ने में आसानी महसूस करने लगें, तब उन्हें औपचारिक रूप से गुणा से परिचित कराया जा सकता है।

## गुणा की समझ का विकास

गुणा जानने का सबसे महत्वपूर्ण पक्ष यह समझना है कि गुणा क्या होता है तथा यह कहाँ लागू किया जाता है। बच्चों से इसका शुरूआती परिचय एक संक्रिया के तौर पर नहीं, बल्कि ठोस चीजों के साथ गतिविधियों के रूप में होना चाहिए। ऐसा कई संदर्भों में किया जा सकता है।

गुणा जिन संदर्भों में आता है, उनको निम्नानुसार वर्गीकृत किया जा सकता है।

- **बराबर समूह** – जब हम यह पता करना चाहते हैं कि बराबर मात्रा के कुछ समूहों में कुल मिलाकर कितनी चीजें हैं। (जैसे, यदि तीन टोकरियां हो और उनमें क्रमशः 4 केले, 4 संतरे और 4 सेब हों, तो कुल कितने फल हुए?)
- **दर –** जब हमें यह पता हो कि एक समूह में कितनी चीजें हैं और हम यह पता करना चाहते हो ंकि उसी तरह के कई समूहों में कुल मिलाकर कितनी चीजें होंगी। (जैसे, यदि एक बच्ची एक साल में 4 कॉपियों का उपयोग करती है , तो एक साल में 8 बच्चे कितनी कॉपियों का उपयोग करेंगे ?)
- **आयताकार समूह –**जब कई चीजें पंक्तियों व स्तम्भों के एक नियमित आयताकार समूह (array) में जमी हों और हम पता करना चाहते हों कि कुल कितनी चीजें हैं। (जैसे, यदि तीन–तीन लड़कियों की पाँच कतारें हों, तो कुल कितनी लड़कियाँ हुई?)



चित्र 3 : 4X3 को दर्शाता आयताकार समूह

- **पैमाना/गुणक संख्या –** जब हमें एक राशि दी गई है और हमें पता करना है कि उसे यदि एक निर्धारित गुणक (multiplying factor) से बढ़ाया जाए तो वह कितनी होगी। (जैसे, केला 6 रूपये दर्जन हो और सेब इससे पाँच गुना महंगे हैं, तो एक दर्जन सेब का दाम क्या होगा ?)
- **कार्तीय गुणनफल –** जब हमें कुल क्रमित जोड़ियों (या तिकड़ियों, वगैरह) की संख्या का पता लगाना हो। (जैसे, यदि हरी 3 अलग–अलग आकार के समोसे बनता है, और उनमें 4 अलग–अलग किस्म का मसाला भरता हैं, तो कुल कितनी किस्म के समोसे बनेंगे?)

ऊपर दिए गए पाँच मॉडल में से पहले दो में कोई फर्क नजर नहीं आता। लेकिन फर्क है। पहले मॉडल में प्रत्येक समूह में अलग–अलग चीजें हो सकती हैं, परन्तु समूहों की मात्रा एक ही होनी चाहिए। 'दर' मॉडल में हरेक समूह में एक सी चीजें होंगी, और समूह बराबर मात्रा के भी होंगे।

E4) गुणा के ऊपर दिए गए पाँचों मॉडल में से हर एक के 2–2 ऐसे उदाहरण बनाइए जो उन बच्चों के माहौल से लिए गए हों जिन्हें आप पढ़ाते हैं।

जैसे आपने देखा, गुणा की जरूरत कई परिस्थितियों में पड़ती हे। इन्हें देखते हुए आप ऐसी कई गतिविधियाँ बना सकते हैं जिनमें बच्चों को गुणा का अभ्यास करने तथा उसका अर्थ समझने में मदद मिले। उदाहरण के लिए,

- आप बच्चों से यह गणना करने को कह सकते हैं कि तिकोनों की किसी निश्चित संख्या (2, 5 या 10 तिकोनों) में कुल कितनी भुजाएं होंगी।
- आप एक खेल बना सकते हैं जिसमें बच्चों की टोलियाँ एक टोकरी (या बाल्टी, या छेद) में गेंद फेंके। हर बच्चे को 5 मौके मिलेंगे और हर कामयाबी पर 3 अंक। बच्चे अब गणना करें कि उसकी टोली को कितने अंक मिले हैं।

बच्चों को इस तरह से ठोस वस्तुओं के जरिए गुणा से परिचित कराते हुए, हमें उनसे लगातार **बातचीत करते जाना चाहिए कि** वे क्या कर रहे हैं। इस तरह से उनमें गुणा की संक्रिया की समझ तो विकसित होगी ही, साथ में वे इस संक्रिया से जुड़ी भाषा, जैसे प्रत्येक, सारे, बराबर, कितने गुना, आदि भी सीखते जाएंगे। जैसेकि–

**उदाहरण 1 :** जब 6 वर्षीय राहुल पर स्कूल में गुणा कराया गया, वह उसे समझ नहीं पाया। उसकी माँ ने हम में से कुछ लोगों से इस समस्या जिक्र किया। उन्होंने चर्चा के दौरान उभरे कुछ सुझावों के आधार पर उसके साथ कुछ गतिविधियाँ करने की ठानी।

सबसे पहले तो उन्होंने राहुल का कंचों का खजाना निकाला। फिर दोनों ने मिलकर इन कंचों को लिफाफों में रखा – हर लिफाफे में चार कंचे रख गए। फिर उन्होंने इन लिफाफों को एक बाल्टी में रख दिया। इसके पास खाली बाल्टी रख दी। अब उन्होंने राहुल से कहा कि वह एक–एक करके लिफाफों को खाली बाल्टी में रखे। जब वह यह क्रिया कुछ बार, मसलन तीन बार, कर चुका तो उन्होंने उससे पूछाः

**माँ** : तुमने कितने लिफाफे निकाले ?

**राहुल** : 3

**माँ** : हर लिफाफे में कितने कंचे है ?

**राहुल** : 4

**माँ** : तो, अगर तुम 1 लिफाफा निकालो, कितने कंचे होंगे ?

**राहुल** : 4

माँ ने लिख दिया 1 (4) = 4 फिर उन्होंने पूछा कि दो लिफाफों में कितने कंचे होंगे, वगैरह।

2 मर्तबा 4 = 4 + 4 = 8

3 मर्तबा 4 = 4 + 4 + 4 = 12

4 मर्तबा 4 = 4 + 4 + 4 + 4 = 16, आदि।

इस तरह से वे उसे इस प्रक्रिया व उससे जुड़ी भाषा का पैटर्न दिखाना चाहती थीं।

उन्होंने अन्य चीजों के साथ इसी तरह के अभ्यास राहुल के साथ तब किए जब तक कि वह समझ न गया कि गुणा करने का मतलब बारम्बार जोड़ना होता है। जल्दी ही वह इस स्थिति में पहुँच गया कि अगर पूछा जाए कि 4 –4 कंचों वाले 8 लिफाफों में कितने कंचे होंगे, तो वह फौरन कहता '8 मर्तबा 4' और 4 को 8 बार जोड़कर उत्तर निकाल लेता।

ऊपर दिए गए उदाहरण में राहुल की माँ ने गुणा का रिकार्ड रखने के लिए कोष्ठक (brackets) का उपयोग किया। यह प्रतीक कुछ ही स्थितियों में उपयोगी होता है। लेकिन गुणा का औपचारिक प्रतीक (यानी X) बच्चों को तभी बताना चाहिए जब वे यह समझ जाएं कि गुणा होता क्या है। इसी प्रकार से गुणनफल, गुणक आदि जैसे औपचारिक शब्द बच्चों को थोड़ा आगे चलकर ही बताए जाने चाहिए, और वह भी इनका उपयोग विभिन्न व्यवहारिक उदाहरणों में करके समझाए जाने चाहिए।

गुणा क्या होता है, इस बात को बच्चे समझे हैं या नहीं, इसकी जाँच का एक तरीका यह है कि उन्हें 'सात गुना छः' जैसे किसी गुणन तथ्य के आधार पर **इबारती सवाल बनाने को कहा जाए।** यदि आप बच्चों के साथ ऐसे अभ्यास के परिणामों का अध्ययन करें, तो आपको इसके बारे में काफी दिलचस्प जानकारी मिल सकती है कि वे क्या व कितना समझे हैं। अब, आप यह पता लगा सकते हैं कि गुणा के किस मॉडल में वे सबसे सुविधाजनक स्थिति में हैं।

निम्नलिखित अभ्यास करते हुए आपको यह देखने का मौका मिलेगा कि यह तरीका कितना कारगर है।

E5) अपने आसपास के कुछ 7 वर्षीय व कुछ 11 वर्षीय बच्चों को लीजिए। प्रत्येक को एक गुणन–तथ्य (मसलन, $6 \times 3 = 18$) देकर उनसे संबंधित एक इबारती सवाल बनाने को कहिए। यह देखिए कि वे ज्यादातर किस मॉडल के सवाल बनाते हैं। यह भी देखिए कि क्या दोनो उम्र समूहों के बीच इस लिहाज से कोई फर्क नजर आता है।

अभी तक हमने गुणा सीखने में बच्चों की मदद करने के तरीकों पर विचार किया। अब यह देखते हैं कि वे कुशलता से गुणा करना कैसे सीख सकते हैं।

## पहाड़े बनाना बनाम तोतारटन्त

किसी भी बड़े व्यक्ति से पूछकर देखिए कि वह किसी बच्चे को आसानी से गुणन–तथ्य सीखने में कैसे मदद करेगी। ज्यादा सम्भावना इस बात की है कि वह कहेगी, ''उसे पहाड़े सिखाकर।'' और पहाड़े सिखाने के लिए वह क्या तरीका अपनाएगी? बच्चे से पहाड़े बारम्बार बुलवाकर, यानी रटवाकर।

लेकिन, क्या यह जरूरी है कि बच्चे पहाड़ों का उच्चारण करें और उन्हें रटकर याद करें? शिक्षकों का कहना है कि तेजी से गुणा करने और गुणन–तथ्यों को तत्काल स्मरण करने के लिए यह जरूरी है। लेकिन दिक्कत यह है कि सिर्फ पहाड़ों का नियिमित आलाप करने से गुणन तथ्यों को तुरंत दिमाग में लाने में कोई मदद नहीं मिलती, क्योंकि हर बार बच्चों को पहाड़ा शुरू से ही दोहराना पड़ता है।

रटने की कवायद पर जोर देने के बजाय जरूरत इस बात की है कि हम बच्चों को खुद पहाड़े बनाने में मदद दें, ताकि वे यह समझ सकें कि पहाड़े वास्तव में होते क्या हैं। एक प्रयोगधर्मी स्कूल की शिक्षक माया इसी बात में यकीन करती हैं और इसका इस्तेमाल भी करती हैं।

निम्नलिखित उदाहरण में हमने उनका तरीका विस्तार में दिया है।

**उदाहरण 2 :** माया का कहना है कि मान लीजिए वह बच्चों से 5 का पहाड़ा बनवाना चाहती है तो वह बच्चों से उनके हाथों का इस्तेमाल करवाती है। हर बच्ची गिनती है कि एक हाथ में कितनी उंगलियाँ हैं,

फिर दो हाथों में कितनी हैं, तीन हाथों में (अपने बगल के बच्चे की उंगनियों का भी गिनकर) कितनी हैं, वगैरह। इस तरह से बच्ची पहाड़ा बना सकती है और धीरे–धीरे, बारम्बार अभ्यास के जरिए वह आसानी से समझ के साथ याद कर पाएगी कि 5 गुना 7 कितना होता है। बच्चों को यह अभ्यास करवाने के लिए वह उसी आकार की अलग–अलग चीजों के समूहों का इस्तेमाल करती हैं। मसलन, पैर की उंगलियाँ, 5 पंखुड़ियाँ वाले फूल, आदि।

माया का कहना है कि वह सबसे पहले बच्चों से 2, 5 व 10 के पहाड़े बनवाती है क्योंकि बच्चों को ये आसान लगते हैं।

उनका लक्ष्य यही है कि बच्चों को कोई भी गुणन–तथ्य तुरन्त याद आ जाना चाहिए। इसके लिए वह बच्चों के साथ निम्नलिखित में से कुछ गतिविधियाँ नियमित रूप से करती है।

1. हर रोज, उस दिन का विषय शुरू करने से पहले वह चंद मिनट बच्चों से गुणनतथ्य पूछने के लिए रखती है।

2. हर दूसरे तीसरे दिन हर बच्चे को निम्नानुसार एक कार्ड दिया जाता है, जिसे उसे भरना होता है।

| | |
|---|---|
| 5 X 3 = | ☐ |
| 7 X 4 = | ☐ |
| 8 X 2 = | ☐ |
| 9 X 5 = | ☐ |
| 5 X 7 = | ☐ |

3. कभी–कभी बच्चों से किसी संख्या के गुणजों को दोहराने को कहा जाता है।

4. कभी–कभी वह उनके साथ 'डाकिया खेल' खेलती है। इस खेल में बच्चों को कई कार्ड दिए जाते हैं। हर कार्ड के एक तरफ किसी गुणन तथ्य का पहला आधा हिस्सा लिखा होता है, जैसे $7 \times 3$ या $8 \times 5$, और दूसरी तरफ 20, 21, 35 जैसी कोई संख्याएं लिखी होती है। अब एक बच्ची डाकिया बन जाती है। उसके पास कुछ 'चिट्ठियाँ' होती हैं जिन पर $6 \times 2$ , $7 \times 3$ ................ जैसे पते होते हैं। वह कक्षा में आकर पुकारती है, ''7 गुणा 3 की चिट्ठी है । 7 गुणा 3 कौन है ?'' जिस बच्चे के पास 21 वाला कार्ड होता है वह कहती है, ''मैं 7 गुणा 3, 21 हूँ। चिट्ठी मुझे दो।'' जब कोई बच्ची सही चिट्ठी की मांग करती है तो उसे एक अंक मिलता है। डाकिया हर चिट्ठी का 'पता' तब तक पुकारती है जब तक सब चिट्ठियाँ बंट जाएं।

E6) एक बच्ची मशीनी ढंग से पहाड़े दोहरा सकती है। क्या आपको लगता है कि वह कोई भी गुणनतथ्य तत्काल बता पाएगी ? यदि नहीं, तो आप सुधार का क्या उपाय सुझाएंगे ?

E7) निम्नलिखित में से गुणा सीखने का अहम् पहलू कौन–सा है ?

i) गुणन तथ्य

ii) पहाड़े याद कर पाना और उनका आलाप

iii) 'कितने गुना' का मतलब समझना।

अपने उत्तर का कारण दीजिए।

E8) मूलभूत गुणनतथ्य याद रखने में बच्चों की मदद के लिए एक खेल विकसित कीजिए।

इस भाग में हमने बच्चों को कुछ आसान गुणन–तथ्य आत्मसात् करने में मदद के तरीकों पर विचार किया।

लेकिन गुणा सीखने का हमारा अंतिम मकसद क्या है ? दो संख्याओं का गुणा कर पाना, है न? इसके लिए उन्हें एक सूत्ररूपी प्रक्रिया का इस्तेमाल करना सीखना होगा। इसी में कई बच्चे गलती करते हैं। अब हम ऐसी ही कुछ गलतियों पर विचार करेंगे और सुधार के कुछ उपाय भी सुझाएंगें।

## गुणा का ऐल्गोरिद्म

एक स्कूल के कक्षा 3 के बच्चों को गुणा का मानक ऐल्गोरिद्म सिखाया जा चुका था। और इससे संबंधित टेस्ट में कुछ बच्चों का प्रदर्शन भी ठीक–ठाक रहा था। इन्हीं में से कई बच्चों ने एक वर्ष बाद कक्षा 4 में इस तरह की गलतियाँ की :

$$\begin{array}{r}{}^{1\,2}\\ 649\\ \times 3\\ \hline 2187\\ \hline\end{array} \quad \text{या} \quad \begin{array}{r}25\\ \times\ 31\\ \hline 65\\ \hline\end{array} \quad \text{या} \quad \begin{array}{r}25\\ \times 5\\ \hline 1025\\ \hline\end{array}$$

जब एक बच्ची से, जिसने पहले किस्म की गलती की थी, पूछा गया कि उसने यह उत्तर कैसे निकाला, तो उसने बताया, ''9 × 3 = 27, तो 7 इकाई में लिखा और हासिल आया 2 फिर 4+2 = 6 और 6 × 3 = 18 तो, 8 लिखा दहाई पर और हासिल आया 1. 6 + 1 = 7 और 7 × 3 = 21, तो उत्तर आया 2187.''

इनमें से किसी भी बच्चे को नहीं लगा कि उसका उत्तर कितना बेतुका है क्योंकि उसे यही समझ नहीं आया था कि गुणा होता क्या है। जाहिर है कि उनके शिक्षक का सिखाने का तरीका कारगर नहीं था। शिक्षक ने जो तरीका अपनाया था, वह यह था कि कुछ उदाहरणों के माध्यम से मानक ऐल्गोरिद्म सिखा दिया था। इसके बाद बच्चों से इस विधि पर आधारित कुछ सवाल मशीनी ढंग से करवा लिये थे। यदि यह तरीका कारगर नहीं है, तो कौन–सा होगा? ऐसा कोई भी तरीका विकसित करने के लिए पहले हमें यह देखना होगा कि गुणा के ऐल्गोरिद्म में कौन सी प्रक्रिया शामिल हैं, और यह विधि क्यों सही उत्तर देती है।

इस ऐल्गोरिद्म को समझने के लिए स्थानीय मान की समझ, गुणा को बारम्बार जोड़ की प्रक्रिया के रूप में देख पाने की समझ, हासिल की समझ जोड़ के सापेक्ष गुणा में बंटन नियम (Distributive law) की समझ जरूरी है। हमने बच्चों को 'स्थानीय मान' तथा 'हासिल' समझने में मदद देने के लिहाज से कई गतिविधियाँ सुझाई थी। हम यह मानकर चलते हैं कि बच्चों ने ये गतिविधियाँ की होंगी और वे यह भी समझ चुके होंगे कि गुणा का अर्थ बारम्बार जोड़ ही है। हम इस बात पर विचार करेंगे कि बच्चे को बंटन नियम की उपयोगिता समझने में मदद कैसे की जाए।

## बंटन नियम

यदि आपके मन में 37 को 9 से गुणा करने को कहा जाए तो आप इसे कैसे करेंगे? मैं इस सवाल को इस तरह से करूंगी – 37 यानी 30 + 7, 30 × 9 = 270, 7 × 9 = 63, तो 270 + 63, यानी 270 + 60+ 3, यानी उत्तर हुआ 333. हो सकता है कि आप 37 को 40–3 के रूप में लेकर फिर (40 × 9) – (3 × 9) की गणना द्वारा उत्तर निकाले। या हो सकता है कि आप मन ही मन गुणा ऐल्गोरिद्म का उपयोग करके उत्तर निकालें।

किसी संख्या को हिस्सों में बांटने से हमें गणना में मदद मिलती है। इस तरह से गणना हम जोड़/बाकी के सापेक्ष गुणा के बंटन नियम की वजह से कर सकते हैं। जैसे, इस नियम के अनुसार,

$(30 + 7) \times 9 = (30 \times 9) + (7 \times 9)$

या $(40-3) \times 9 = (40 \times 9) - (3 \times 9)$

यदि सामान्य रूप में देखें, तो किन्हीं रूप में तीन संख्याओं a, b और c के लिए नियम इस तरह लिखा जाएगा,

(a +b ) x c = (a x c)  + (b x  c); और

(a - b) x c = (a x c) -  (b x  c)

बच्चों को यह नियम समझने में मदद कैसे करें ? माया (उदाहरण 2) ने बताया कि वह कक्षा 3 के बच्चों के साथ क्या करती हैं।

**उदहारण 2 (जारी)** : माया पहले तो बच्चों को छोटी–छोटी संख्याओं के बंटन के उदाहरण इस तरह समझाती है ताकि वे नियम को खुद खोज पाएं। आमतौर पर वह बच्चों को इस तरह के सवाल देती हैः ''एक फौजी अफसर की वर्दी पर बटनों की 7 कतारें हैं और हर कतार में 4 बटन हैं। 4 कतारें बेल्ट के ऊपर है और 3 कतारें बेल्ट के नीचे। तो कुल कितने बटन हुए ?'' आमतौर पर बच्चे सारी कतारें गिनकर लिख देते हैं कि–

7 मर्तबा 4 = 7(4) = 7 × 4 = 28

फिर वह उनसे यही सवाल निम्नानुसार करवाती है :

बेल्ट के ऊपर कितनी कतारें है ? .................. 4 कतारें।

तो, बेल्ट के ऊपर वाली कतारों में कुल कितने बटन हुए? ..........4 मर्तबा 4, यानी 16.

बेल्ट के नीचे हुए ? ................. 3 मर्तबा 4, यानी 12.

तो कुल कितने ? ............. 16 + 12, यानी 28.

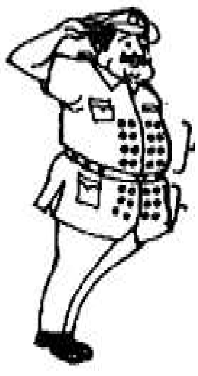
दोनों उत्तर समान हैं ऐसा क्यों ?

वह 4–4 बटन की 7 कतारों का एक चित्र बनाती है (देखिए चित्र 4), और समझाती है कि कैसे 7 कतारों को 4 कतारों व 3 कतारों में बांटा जा सकता है। वह यह भी समझाती है कि कैसे इस तरह से करने पर भी सारे बटन शामिल हो जाते हैं। तो,

7 कतारें = 4 कतारें + 3 कतारें

7 × 4 = (4 × 4) + (3 × 4)

यानी (4 + 3) × 4 = (4 × 4) + (3 × 4)



चित्र 4 : (4X4) + (3 X 4) = (4 + 3) X 4

इसी तरह के कुछ और उदाहरण करवाने के बाद वह बच्चों को खुद करने को कुछ सवाल भी देती है। जब उन्हें बंटन नियम के उपयोग का कुछ अभ्यास हो जाता है, तब माया उन्हें यह बताती है कि किसी 2 अंकों की संख्या को 1 अंक की संख्या से गुणा करने में बंटन नियम का इस्तेमाल कैसे होता है।

इसके लिए वह शुरू में बच्चों को कहानी से जुड़े इस तरह के सवाल देती हैः 'एक लड़का 5–5 के समूह में बंधे हुए प्लास्टिक के फूल बेचता है। वह 10 पैकेट अपनी दायीं बाजू तथा 4 पैकेट बायीं बाजू पर रखता है। उसके पास कुल कितने फूल है ?' वह कुछ ऐसे सवालों के जरिए बच्चों को बंटन नियम की ओर ले जाती हैः ''कुल कितने पैकेट है?'', ''दायीं ओर कितने हैं ?'', वगैरह। कहानी से जुड़े इस तरह के सवाल बच्चों से पूछती है जिनका जवाब देने से वह खुद ही समझ जाएं कि :

$$14(5) = 10(5) + 4(5)$$
$$= 50 + 20$$
$$= 70$$

वह इस पूरी प्रक्रिया में इस बात पर जोर देती है वह है पहला कदम, यानी बंटन। उसे लगता है कि इस तरह के और उदाहरणों के माध्यम से बच्चे धीरे–धीरे यह समझने लगते हैं कि जब किसी 2 अंक वाली संख्या का 1 अंक वाली संख्या से गुणा करना हो, तो उसे दहाई व इकाई में बांट लेते हैं और फिर दोनों का अलग–अलग गुणा कर लेते हैं। इन गुणनफलों को आपस में जोड़ने पर सही उत्तर मिल जाता है।

बच्चों को बंटन नियम का अभ्यास कराने के मक्सद से माया उन्हें निम्नलिखित अभ्यास देती है :

15(7) = 10(7) + 5(7)

14(5) = ......(5) + 4(5)

18(2) = 10(2) + .......(......)

15(3) = ......(.......) + 5(......)

यह कोई एक बार में निपट जाने वाली गतिविधि नहीं है। जब बच्चे मानक ऐल्गोरिद्म सीख रहें होते हैं उस दौरान माया बार–बार बंटन की बात पर लौटती है।

E9) अपने आस–पड़ोस के कक्षा 4के कुछ बच्चों को 15 X 6 जैसा कोई सवाल मन में करने को दीजिए।उनसे बातचीत करके पता लगाइए कि वे इसको हल करने के लिए क्या–क्या तरीक़े अपनाते हैं। और इन तरीकों को लिख डालिए।

## गुणा का ऐल्गोरिद्म कैसे काम करता है?

यदि 35 को 23 से गुणा करने को कहा जाए तो हममें से अधिकांश लोग यों लिखेंगे:

```
  35
X 23
----
 105
 70X
----
 105
----
```

हम गणना की दूसरी पंक्ति में X (या 0) क्यों लगाते हैं, या खाली स्थान क्यों छोड़ते हैं?

गुणा की सूत्र विधि दरअसल उसी बंटन नियम पर आधारित है जिसकी चर्चा हमने ऊपर की थी। इस विधि में किसी एक अंक की संख्या को किसी 2 अंक की संख्या से गुणा करने के निम्नांकित चरण होते हैं :

i) 2 अंक की संख्या को दो भागों में – दहाई और इकाई में बांटते हैं।

ii) फिर इनमें से हरेक भाग को अलग–अलग एक अंक वाली संख्या से गुणा करते हैं।

iii) और अंत में दोनों गुणनफलों को जोड़कर उत्तर प्राप्त करते हैं।

उदाहरण के लिए, $13 \times 7 = (10 + 3) \times 7$

$= (10 \times 3) + (3 \times 7)$, बंटन नियम से।

$= 91$

मानक ऐल्गोरिद्म में हम गुणा की संक्रिया संख्या की सबसे छोटी यूनिट (unit) यानी इकाई वाले अंक से शुरू करते हैं, और फिर बायीं ओर बढ़ते जाते हैं। ऐसा इसलिए करते हैं क्योंकि हम सबसे पहले सबसे छोटी मात्रा के समूहों, यानी इकाई के स्थान पर अंकों की मात्रा वाले समूहों को जोड़ते हैं। इसके परिणाम को फिर इकाई व दहाई में बांटा जाता है। इकाई को तो इकाई के स्थान पर ही रख दिया जाता है, मगर दहाई को हासिल के रूप में अलग रख दिया जाता है। फिर संख्या के दहाई अंक में गुणक से गुणा करने पर जो परिणाम आता है उसमें हासिल वाली संख्या को जोड़ दिया जाता है। पूरे ऐल्गोरिद्म की बुनियाद यही प्रक्रिया हैं।

मसलन, $13 \times 7$ में हम पहले 3 को 7 से गुणा करते हैं। परिणाम आता है 21. हम इस 21 के 1 को तो इकाई स्थान पर रख देते हैं, मगर 20 को 2 दकाई के रूप में आगे ले जाते हैं। इसे 13 की 1 दहाई में 7 का गुणा करने पर प्राप्त परिणाम में जोड़ देते हैं, यानी 2 दहाई को 7 दहाई में जोड़कर 9 दहाई प्राप्त हो जाती हैं।

बच्चों को इस प्रक्रिया का पूरा अहसास देने के लिए बंटन की समझ ज़रूरी है। इसके अलावा हमें बच्चों को प्रोत्साहित करना चाहिए कि वे संख्याओं को इकाई व दहाई में बांट के गुणा करने में इस नियम का इस्तेमाल करें। इसके बाद हम उन्हें गुणा के औपचारिक ऐल्गोरिद्म पर ले जा सकते हैं।

यह ज़रूरी नहीं कि बच्चे एक ही दफ़ा में समझ पाएं कि यह ऐल्गोरिद्म कैसे काम करता है। इस समझ के विकसित होने में तकरीबन 2 साल लग सकते हैं। इस दौरान उन्हें बार–बार इस बात पर आना चाहिए कि ऐल्गोरिद्म काम कैसे करता है। यह विधि कैसे काम करती है, उसकी तुलना इसी दौरान सीखी गई अन्य विधियों से करके भी देख सकते हैं।

E10) जब हम, उदाहरण के लिए, 35 को 23 से गुणा करते हैं, तो दूसरी पंक्ति के परिणाम को एक स्थान खिसकाकर क्यों लिखते हैं?

E11) 3 अंक की संख्या को 2 अंक की संख्या से गुणा करने की विधि चरण–दर–चरण लिखिए। यह भी समझाइए कि हर चरण कैसे काम करता है।

बच्चों को गुणा सिखाने का हमारा मक़सद क्या है? एक तो उन्हें उन स्थितियों को समझ जाना चाहिए जहाँ गुणा करने की ज़रूरत है तथा यह भी समझ जाना चाहिए कि किन–किन संख्याओं का गुणा करना है। इसके अलावा लम्बा गुणा, यानी कई अंकों वाली किसी संख्या को किसी अन्य बहु–अंकीय संख्या से गुणा, करने की क्षमता भी उनमें विकसित होनी चाहिए। इस क्षमता के साथ उन्हें यह भी समझ में आ जाना चाहिए कि ऐल्गोरिद्म में क्या हो रहा है। बच्चों में ये सारी समझ विकसित करने के लिए निम्नलिखित क्रम अपनाया जा सकता है।

1. ''गुणा का अर्थ'' की समझ का विकास।
   - (क) बराबर संख्या में चीजों के समूह बनाना।
   - (ख) बराबर समूहों को जोड़ना।
   - (ग) संख्याएं छोड़–छोड़कर गिनती करना।
   - (घ) शुरूआती गुणा तथ्यों का अभ्यास – पहाड़े बनाना।

2. गुणा से संबंधित भाषा का उपयोग व समझ के साथ–साथ गुणन–तथ्यों को प्रतीकों से लिखने की विधि

3. जोड़ के सापेक्ष गुणा का बंटन नियम समझना और लागू करना।

4. गुणा का ऐल्गोरिद्म सीखना – कॉलमों में लिखना, जैसे $\begin{array}{r} 3 \\ \times 4 \\ \hline 12 \end{array}$

5. दो अंको वाली संख्याओं के गुणा से परिचय – दो अंकों की संख्या से एक अंक की संख्या का गुणा,

हासिल बगैर, जैसे और हासिल समेत, जैसे

6. ऐल्गोरिद्म को आगे बढ़ाकर दो अंकों की संख्या को दो अंकों की संख्या से गुणा करनाः

   i) इनमें से एक संख्या को बाँट के, जैसे 23 X 12 = (23 X 2) + (23 X 10)

   ii) बगैर हासिल के।

   iii) हासिल समेत।

7. ऐल्गोरिदम की गहरी समझ विकसित करना।

8. तीन अंकों की संख्या को

   i) एक अंकों की संख्या से गुणा करना। 12

   ii) दो अंकों की संख्या से गुणा करना। ×4

आइए अब उन समस्याओं पर गौर करें जो बच्चों को भाग सीखने में आती हैं। साथ ही सुधार के कुछ उपायों पर चर्चा करेंगे।

## भाग का मतलब

प्राइमरी स्कूल के किसी भी शिक्षक से पूछिए कि गणित के वे कौन से क्षेत्र हैं जो बच्चों को सबसे मुश्किल लगते हैं। मुश्किलों की सूची में शायद भाग ही सबसे ऊपर होगा।यदि आप ऐसे बच्चों के साथ बातचीत करें जो भाग 'सीख' चुके हों, तो आप पाएंगे कि इबारती सवालों में वे आसानी से यह नहीं पहचान पाते कि कब भाग देना है और किस संख्या में किस संख्या का भाग देना है। और यह भी जाहिर हो जाता है कि भाग का ऐल्गोरिद्म भी वे ठीक से लागू नहीं कर पाते। इन दिक्कतों के कई कारण हो सकते हैं।

1. बच्चों के जीवन में ऐसे मौके बहुत कम आते हैं जब उन्हें ऐसी संख्याओं के भाग करना पड़े जो बहुत छोटी न हों।

2. बच्ची गतिविधियों के जरिए भाग का मतलब समझ पाए, इससे पहले ही उसे एक लिखित ऐल्गोरिद्म के रूप में भाग सिखाना शुरू कर दिया जाता है।

3. भाग के ऐल्गोरिद्म में हम बाएं से दाएं चलते हैं जबकि बाकी सारी संक्रियाएं दाएं से बाएं लागू की जाती हैं।

4. भाग क्रमविनिमेय संक्रिया नहीं है। (मसलन, 6 ÷ 3 और 3 ÷ 6 एक बराबर नहीं है।)

E12) बच्चों को 'भाग' क्यों मुश्किल लगता है, इसके दो और कारण लिखिए।

ऊपर दिए गए पहले कारण के संदर्भ में बच्चे के भाग–संबंधी ऐसे अनुभव शायद अपने दोस्तों के साथ चीजों के बँटवारे को लेकर होते हैं। 'बाँटने' का मतलब कभी–कभी 'बराबर–बराबर हिस्से बाँटना' भी होता है। वैसे हर बार ऐसा नहीं होता (मसलन, यदि कोई बच्ची आपसे कहे कि उसके साथ खाना बाँटिए, तो इसका मतलब यह नहीं होता कि वह आपको अपने खाने का ठीक आधा हिस्सा देगी)।

चित्र 5 : बराबर बँटवारा

मोटे तौर पर, बच्चों का वास्ता तीन तरह की भाग संबंधी स्थितियों से पड़ता है।

- **समूहीकरण –** जब हम यह पता करना चाहें कि किसी निर्धारित राशि में से एक निर्धारित परिणाम के कितने हिस्से प्राप्त हो सकेंगे, (मसलन, यदि कक्षा में 50 बच्चे हैं और इन्हें 5–5 की टोलियों में बाँटना हैं, तो कितनी टोलियों बनेंगी ?)
- **बराबर बँटवारा –** जब हम यह पता करना चाहें कि किसी निर्धारित राशि के कुछ बराबर–बराबर हिस्से करने हों, तो हर हिस्से में कितनी मात्रा आएगी। (मसलन, मेरे पास 50 टॉफियां है और मैं इन्हें 5 बच्चों में बराबर–बराबर बाँटना चाहती हूँ। हर बच्चे को कितनी टॉफियां मिलेंगी ?)
- **अनुपात –** जब हम दो राशियों की तुलना उनके अनुपात के आधार पर करना चाहें। (मसलन, मुन्ना का वजन 40 कि.ग्रा. है और मुन्नी का 50 कि.ग्रा. है। उनके वजन का अनुपात निकालिए।)

दस वर्ष की उम्र तक बच्चों का वास्ता ज्यादातर पहले दो मॉडलों से होता है। तीसरा मॉडल दरअसल गुणा के पैमाना मॉडल का उलट है। आमतौर पर इसे 10 वर्षीय बच्चे के लिए समझना थोड़ा कठिन है।

यह समझने के लिए कि भाग क्या होता है, हमें बच्चों को विभिन्न परिचित संदर्भों में पहले दो किस्मों के कई उदाहरण देने चाहिए। जैसे– उदाहरण–3

**उदाहरण 3 :** संतोष के मुताबिक महत्वपूर्ण बात यह है कि बच्चे का भाग से परिचय ठोस चीजों से साथ आसान गातिविधियों के जरिए कराया जाना चाहिए। जैसे, वह बच्चों से कहती है कि 30 बीजों/पत्तियों/कंकड़ों को 3–3 के समूह में रखें और फिर समूहों की संख्या गिनें। इसके बाद वह उनसे पूछती है कि ''30 में कितने 3 हैं?''

उनके साथ एक और गतिविधि वह यह करती है कि उन्हें 5–5 की टोलियों में बाँट देती है और हर टोली को 20 चीजें दे देती है (किसी टोली को कंचे, किसी को कंकड़, वगैरह, मिलते हैं)। फिर वह टोली के एक बच्चे से कहती है कि उन चीजों को टोली के सारे बच्चों के बीच बाँटे। बच्ची 5 कंचे गिनती है और हर सदस्य को एक–एक दे देती है। संतोष तब उससे इस तरह के सवाल करती है :''पाँच–पाँच के कितने समूह वह ले सकती है?'' और ''हर बच्चे को कितने कंचे मिले?''

चूँकि भाग की प्रक्रिया आसानी से समझ नहीं आती, इसलिए संतोष को लगता है कि ऊपर सुझाई गई

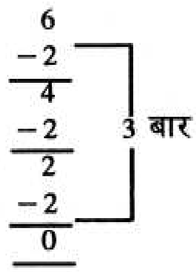
गतिविधियों जैसी कई गतिविधियाँ करना जरूरी है। यह काम अलग–अलग संदर्भों में, अलग–अलग चीजों के साथ किया जाना चाहिए।

बच्चों के साथ ये गतिविधियाँ करते हुए वह बच्चों से बातचीत में 'बाँटना', 'भाग करो', 'इतने भाग करो', 'इतने से भाग करो', 'कितनी बार', 'इसमें कितने हैं', 'कितने भाग हुए', 'बराबर भागों में बाँटा', वगैरह, जुम्लों का इस्तेमाल करती जाती है। वह बच्चों को इन जुम्लों को इस्तेमाल करते हुए कई कहानियाँ भी बताती है। थोड़ा आगे चलकर वह बच्चों को भाग से सम्बन्धित कहानियाँ बनाने को प्रेरित करती है।

जब संतोष को महसूस होता है कि बच्ची चीजों के समूहों के भाग कर लेती है, तब वह उसे इस संक्रिया का अर्थ समझने में मदद देने की प्रक्रिया शुरू करती है। इसके लिए वह बच्ची को यह समझने में मदद देने की कोशिश करती है कि भाग दरअसल गुणा की उलट संक्रिया है। वह नीचे बताई गई गतिविधियों और वैसी और गतिविधियों का उपयोग इस काम के लिए करती है :

वह बच्ची से कहती है कि माचिस की दस तीलियों के एक समूह को 2–2 तीलियों के समूहों में बाँटे। फिर उससे पूछती है कि कुल कितने समूह बने। इसके बाद वह उससे कहती है कि 2–2 तीलियों के वही 5 समूह ले और बताए कि कुल कितनी तीलियाँ हुई। वह इसी तरह की गतिविधि 10 पत्थर, 10 टहनियों, आदि के साथ तब तक दोहराती है जब तक कि बच्ची '10 को 2 से भाग देने पर 5 आता है' (या 10 भागित 2, 5 होता है) का संबंध '2 गुणा 5, 10 होता है' से न देखने लगे।

इस तरह के अभ्यासों और अनुभवों के बाद धीरे–धीरे जब बच्चों से पूछा जाता है कि '6 भागित 2' क्या होगा, तो वे '6 में 2 कितनी बार आएगा ?' जैसे प्रश्न के माध्यम से जवाब देने की कोशिश करते हैं। इस प्रश्न का उत्तर देने के लिए वे 2 का पहाड़ा 6 तक बोलते हैं और कहते हैं ''6 भागित 2 बराबर 3 होगा।'' शुरू में कई बच्चे इस सवाल का उत्तर देने के लिए 'बारम्बार घटाने' का सहारा लेते हैं। यानी उनके लिए '6 भागित 2' का अर्थ यह है कि '6 में से 2 को कितनी बार घटाया जा सकता है?', अर्थात्




एक बार बच्चे यह समझ लें कि आसान परिस्थिति के संदर्भ में भाग का क्या अर्थ है, तब संतोष ÷ प्रतीक से उनका परिचय कराती है। फिर प्रतीकों से उनको अच्छी तरह परिचित कराने तथा 'ग' व '÷' के बीच का संबंध समझाने के लिए वह उन्हें कई गतिविधियाँ देती है। जैसे कि वह उन्हें छोटी–छोटी टोलियों में बाँटकर प्रत्येक टोली को [ = ] [ 10 ] [ ÷ ] [ 2 ] [ 5 ] जैसे कार्डों का सेट देती है। इन कार्डों को इस्तेमाल करके वह उनसे एक भाग–तथ्य लिखने को कहती है। फिर वह ÷ के कार्ड की जगह X वाला कार्ड दे देती है और उनसे पूछती है कि क्या वे कार्डों को फिर से जमाकर कोई अन्य गणितीय कथन बना सकते हैं। (इस गतिविधि को कई रूपों में पेश किया जा सकता है।)

वह बच्चों को वर्कशीट देकर भी भाग/गुणन–तथ्य का अभ्यास करवाती है।

काफी समय तक बच्चों के काम को परखने के बाद संतोष इस निष्कर्ष पर पहुँची है कि इस तरीके से भाग सीखने पर बच्चे $24 \div 3 = 8$ जैसे कथन को निम्नानुसार समझने लगते हैं :

- यदि 24 चीजों के किसी समूह को 3–3 चीजों के समूहों में बाँटा जाए, तो हर भाग में 8 चीजें होंगी।
- यदि 24 चीजों के किसी समूह को 3–3 चीजों के समूहों में बाँटा जाए, तो 8 समूह बनेंगे।

- 24 में से 3 को 8 बार घटाया जा सकता है।
- 8 तिया 24 होते हैं।
- 3 अट्ठे 24 होते हैं।
- 24 में 3, आठ बार आता है।

बातचीत के दौरान संतोष ने मुझे एक महत्वपूर्ण बात यह बताई कि जिस ढंग से वह बच्चों को भाग सिखाती है, उसके लिए **यह कतई जरूरी नहीं कि भाग सीखने से पहले बच्चों को गुणा का गहरा ज्ञान हो।** गुणा के साथ थोड़ा सा परिचय हो, तो वे इन दो संक्रियाओं के बीच संबंध देख पाते हैं। और बच्चे ये दोनों संक्रियाएं साथ–साथ सीखते चलते हैं।

E13) गुणा व भाग को साथ–साथ सीखना चाहिए। आप इस बात से सहमत हैं या नहीं? अपने उत्तर का कारण भी दीजिए।

E14) आप बच्चों को कैसे समझाएंगे कि शून्य से भाग करना अर्थहीन है?

अभी तक हमने इस बात पर चर्चा की कि बच्चों को भाग की अवधारणा कैसे बताएँ। ऐसा करते हुए हमने सिर्फ ऐसे सवालों पर ध्यान दिया जिनमें शेष (remainder) कुछ नहीं बचता। इन सवालों से बच्चों को यह समझने में मदद मिलती है कि गुणा व भाग परस्पर विपरीत संक्रियाएं हैं। जब बच्चे यह बात समझ जाएं तो उन्हें ऐसे सवाल दिए जा सकते हैं जिनमें धनात्मक शेष रहता है, जैसे $24 \div 5$.

भाग से जुड़ी अन्य अवधारणाओं व शब्दों, मसलन भागफल, शेष आदि को समझने में बच्चों को काफी कठिनाई होती है। ''27 को 6 से भाग देने पर शेष क्या रहेगा ?' जैसे सवाल से सामना करने पर वे चक्कर में पड़कर कह बैठते हैं 4.

इन अवधारणाओं की ठोस उदाहरणों से शुरू किया जाए। यदि कोई बच्ची ठोस चीजों के साथ कई ऐसे अभ्यास करे जिनमें शेष बचता है, तो धीरे–धीरे वह इस अवधारणा को समझने लगेगी। दैनिक जीवन के उदाहरणों से इस समझ को और पुख्ता किया जा सकता है। (जैसे– मोती ने 7 पेंसिलें खरीदीं। उसने इन पेंसिलों को 3 बच्चों के बीच बराबर–बराबर बाँटा। उसके पास कितनी पेंसिलें बचीं?) बच्चों से अपने उत्तर निकलवाते वक्त आप 'भागफल', 'शेष' जैसे शब्दों पर जोर दे सकते हैं। बच्चों के सामने ऐसे कई उदाहरण रखे जाने चाहिए।

साथ ही, बच्चों से ऐसी स्थितियाँ व संदर्भ रचने को कहा जाना चाहिए जिनमें शेष वाले भाग आते हों। ये स्थितियाँ छोटे–छोटे समूहों में बनाई जा सकती हैं और समूह में ही एक–दूसरे के सामने रखी जा सकती हैं, या दूसरे समूहों के सामने एक चुनौती के रूप में पेश की जा सकती हैं।

धीरे–धीरे सवालों में आने वाली संख्याओं को बड़ा किया जा सकता है। जैसे– अगले चरण में आप पूछ सकते हैं, ''26 कंचे हैं और 7 बच्चों को खेलना है यदि हर बच्चे को बराबर–बराबर कंचे मिले तो बताओ हर बच्चे को कितने कंचे मिलेंगे और कितने कंचे बच जाएंगे ?''

**यदि बच्चे बड़ी संख्याओं वाले सवालों का जवाब न दे पाएं, तो आप उन सवालों को ठोस चीजों की 'गतिविधि के रूप में प्रस्तुत कर सकते हैं।** आप जरूरी संख्या में कंचे या कोई अन्य आसानी से मिलने वाली छोटी चीज जुटा लें। अब बच्चों से पूछिए कि वे इन चीजों के साथ भागफल और शेष निकालने का काम कैसे करेंगे।

यह गतिविधि अलग–अलग संख्याओं और अलग–अलग संदर्भों में दोहराई जा सकती है। अगला अभ्यास करते हुए आप ऐसी कई संभावनाओं के विषय में सोचिए।

E15) बच्चे का 'भागफल' व 'शेष' शब्द समझने में मदद देने के लिए आप और कौन–सी गतिविधियाँ सोच सकते हैं?

एक बार बच्चे भाग की अवधारणाा व प्रक्रिया समझ जाएं, तो काफी अभ्यास मिलने पर वे धीरे–धीरे छोटी संख्याओं के भाग आसानी से कर पाएंगे। लेकिन बड़ी संख्याओं का भाग करने के लिए उन्हें भाग का ऐल्गोरिद्म इस्तेमाल करना होगा। यह बच्चों के लिए बहुत कठिन होता है।

## भाग का ऐल्गोरिद्म

यदि आप किसी 10–11 वर्षीय बच्ची से 81 ÷ 9 हल करने को कहें तो संभावना यह है कि वह इसे सही–सही कर देगी। लेकिन, अगर आप उससे 72 ÷ 3 करने को कहें तो ज्यादा संभावना है कि वह इसे गलत करेगी। कारण यह है कि इस मामले में उसे एक ऐल्गोरिद्म का उपयोग करना होगा, जिसे वह बगैर समझे आँख मूँदकर इस्तेमाल करती आई है। वह यह नहीं समझती कि इसमें होता क्या है या इससे सही उत्तर कैसे मिल जाता है।

जब हमने नजदीक के एक प्राइमरी स्कूल की कक्षा 5 के कुछ बच्चों को भाग के सवाल दिए, तो उनमें से कई ने इस तरह की गलतियाँ कीं :

```
   11              11                  13
5 ) 65          5 ) 505            5 ) 515
    6               5                  5
   ---             ---                ---
    5    या          5       या         15
    5               5                 15
   ---             ---                ---
    x               x                  x
```

हमें ऐसे उत्तर क्यों मिले? इसलिए कि बच्चे यह नहीं समझे हैं कि ऐल्गोरिद्म कैसे व क्यों काम करता है। दरअसल, यह बात **अधिकांश बड़े लोग** भी नहीं समझते हैं। हममें से कितने लोग जानते हैं कि भाग करते वक्त क्यों हम बाएं से दाएं चलते हैं जबकि अन्य संक्रियाएं करते वक्त दाएं से बाएं चलते हैं ? आइए इसी खासियत पर चर्चा करें।

भाग देते समय सबसे बाईं ओर के अंक से शुरू करने का कारण सरलता व दक्षता है। उदाहरण के लिए, 417 को 3 से भाग देते हैं। सबसे पहले हम 4 सैकड़ा को 3 से भाग देते हैं, तो हमें भागफल में एक सैकड़ा मिलता है, और 1 सैकड़ा शेष रहता है। इस शेष को हम 10 दहाई में बदल लेते हैं और 1 दहाई तो हमारे पास पहले से है। इन कुल 11 दहाई को 3 से भाग देते हैं, तो भागफल में 3 दहाई तथा शेष 2 दहाई बच जाती है। इन दो बचे दहाई को 20 इकाई बदल लेते हैं और पहले से मौजूद 7 इकाई के साथ 27 इकाई हो जाती हैं। 3 से भाग देने पर भागफल में 9 इकाई आ जाती हैं और शेष कुछ नहीं बचता। तो उत्तर 139 मिल जाता है।

अब जरा देखें कि इकाई से भाग शुरू करें तो क्या होता है। हम पहले 7 को 3 से भाग देंगे। इससे भागफल में 2 इकाई आएंगी तथा 1 इकाई शेष रहेगी। फिर हम 1 दहाई को देखेंगे। इसे 3 से विभाजित करने के लिए हमें इसे 10 इकाई में बदलना होगा। फिर इसमें पिछले चरण से शेष 1 इकाई जोड़ना होगा। अब हम 11 इकाई में 3 का भाग देंगे। भागफल में 3 इकाई तथा शेष 2 इकाई बचेंगी। इसके बाद हम जाएंगे सैकड़ा के 4 पर। इसे 3 से भाग देने पर भागफल में 1 सैकड़ा आएगा और 1 सैकड़ा शेष रहेगा, यानी 10 दहाई

बचीं। इसे 3 से भाग देने पर भागफल में 3 दहाई और शेष 1 एक दहाई रही। भूलिए मत कि हमारे पास 2 इकाई पहले से शेष है। इस 1 दहाई के साथ मिलकर वे 12 इकाई हो जाएंगी। इसे 3 से भाग देने पर हमें 4 इकाई और भागफल में मिलेंगी। तो इस तरह आगे–पीछे करने के बाद हमने भाग पूरा कर लिया और साथ में हमें कई भागफलों को याद रखना पड़ा, सो अलग।

कोई बच्ची चरण–दर–चरण मानक प्रक्रिया की समझ कैसे बनाए? हम उसे यह समझने में मदद कैसे करें कि यह ऐल्गोरिद्म क्यों काम करता है? आइए देखें इस संबंध में जरीना क्या कहती है।

**उदाहरण 4 :** जरीना काफी समय से उच्च प्राथमिक स्कूल के बच्चों को पढ़ा रही है। इस दौरान उन्होंने भाग का ऐल्गोरिद्म सिखाने के कई तरीके अपनाए और उनमें समय–समय पर सुधार करती रही। वह इस निष्कर्ष पर पहुँची है कि बच्चों को यह ऐल्गोरिद्म सिखाने का सर्वोत्तम तरीका यह है कि उन्हें ठोस चीजों से गतिविधियाँ करवाई जाएं।

वह बच्चों को तीलियों के कुछ बंडल और कुछ खुली तीलियों की मदद से भाग करने को कहती हैं। हर बंडल में 10 तीलियाँ होती हैं। पहले वे 9÷3 जैसे सवाल देती हें जिन्हें बच्चे आसानी से कर लेते हैं। फिर वह 12 ÷ 3 जैसे सवालों पर जाती है। इसमें एक बंडल व दो तीलियों का उपयोग होता है। वह बच्ची से कहती है, ''यदि ये तीलियाँ 3 बच्चों में बाँटनी हों, तो तुम कहाँ से शुरू करोगी ?'' बच्ची निश्चित रूप से बंडल खोलकर 12 तीलियाँ बाँट देती है, जिससे हर बच्चे को 4 तीलियाँ मिल जाती हैं। पूरी गतिविधि के दौरान जरीना बच्ची से बुलवाती जाती है कि वह क्या कर रही है, और ये लिखवाती भी है। इस तरह से बच्ची भाषा तथा प्रतीकों के इस्तेमाल की आदी हो जाती है।

जरीना 30÷3 जैसे सवालों पर बढ़ जाती है, जिनमें बच्ची समझ जाती है कि इन तीन बंडलों को बगैर खोले ही बाँटा जा सकता है। इसके बाद जरीना 36÷3 जैसे सवाल लेती हैं जिनमें बंडलों को और तीलियों को 3 से भाग दिया जा सकता है और शेष कुछ नहीं बचता। हरेक उदाहरण में वे बच्चों से भाग को निम्नानुसार लिखवाती जाती है :

```
      1 बंडल + 2 तीलियां
3 ) 3 बंडल + 6 तीलियां
    3 बंडल
    ------------------
    0 बंडल + 6 तीलियां
             6 तीलियां
    ------------------
             ×
```

यानी उत्तर आया 1 बंडल + 2 तीलियाँ = 12 तीलियाँ।

वह उन्हें बंडल/तीलियों व दहाई /इकाई के परस्पर सम्बन्ध की याद भी दिलाती जाती है। मसलन, 84 ÷4 को इस तरह कर सकते हैं :

```
      2 दहाई + 1 इकाई
4 ) 8 दहाई + 4 इकाई
    8 दहाई
    ------------------
    0 दहाई + 4 इकाई
             4 इकाई
    ------------------
             ×
```

ऐसे कुछ और सवाल करने के बाद वे 84÷3 जैसे सवाल हल करने के लिए बंडल और तीलियों के उपयोग पर लौटते हैं। इनमें जब 'दहाई' के अंक को विभाजित किया जाता है। तो शेष बचता है। पहले तो बच्ची बंडलों को 3 समूह में बाँटती है, जहाँ हर समूह में 2 बंडल हैं। उसके पास 2 बंडल बचे रहते हैं। वह इन बंडलों को खोलती हैं। उसके पास 20 तीलियाँ हो गईं। पहले से उसके पास 4 तीलियाँ हैं। दोनों को जोड़कर उसके पास कुल 24 तीलियाँ हैं। वह इन तीलियों को 3 समूहों में बाँट देती है, हर समूह में 8 तीलियाँ हैं। यानी अंत में हर समूह में 2 बंडल और 8 तीलियाँ हैं, यानी 2 दहाई और 8 इकाई, अर्थात् 28. इस प्रक्रिया को भी उसी तरह लिखा जाता है जैसे पहले के सवालों में लिखा गया था।

काफी अभ्यास के बाद बच्चे धीरे–धीरे ठोस चीजों के सहारे के बगैर ही ऐल्गोरिद्म का उपयोग करने लगते हैं। यह जरूर है कि किसी भी चरण में भ्रम होने पर वे बंडल व तीलियों का सहारा ले सकते हैं।

जब बच्चे ऐसी संख्याओं के साथ ऐल्गोरिद्म का उपयोग करने में दक्ष हो जाते हैं जिनमें कोई शेष नहीं बचता, तो जरीना उन्हें 35÷3 जैसे सवाल देती है। इनमें वह फिर बच्चों से बंडल और तीलियों का उपयोग करने को कहती है। गतिविधि करते हुए वह बारम्बार 'शेष' शब्द का इस्तेमाल करती रहती है और इसका संबंध ' कितने शेष रहे जिन्हें नहीं बाँटा जा सकता' से जोड़ती जाती है। और पहले की ही तरह यहाँ भी वह उनसे अपना हल चरण–दर चरण लिखते जाने को कहती है।

E16) किसी बच्चे को भाग का ऐल्गोरिद्म ठीक से समझने में मदद के लिए कोई अन्य गतिविधियाँ विस्तार में सुझाइए।

इस पाठ में हमने यह कहने की कोशिश की कि सीखने/सिखाने की पूरी प्रक्रिया में **हमारा जोर इस बात पर होना चाहिए कि बच्चों को अवधारणा, संक्रिया, सवाल तथा उसके हल का अर्थ खोजने का अवसर मिलें।** बच्चों में यह क्षमता भी विकसित होनी चाहिए कि वे जो कुछ सीखें उसका सम्बन्ध व्यावहारिक परिस्थितियों से जोड़ पाएं।

## सारांश

इस पाठ में हमने

1) बच्चों को गुणा व भाग का अर्थ समझाने के तरीकों के सुझाव दिए। वे संक्रियाएं बच्चों का पहले ठोस संदर्भ में गतिविधि के जरिए सिखाई जानी चाहिए।

2) बच्चों को इन संक्रियाओं से संबंधित पारिभाषिक शब्दों के उपयोग की क्षमता हासिल करने में मदद देने के तरीक़ों की चर्चा की।

3) उन विभिन्न स्थितियों को सूचीबद्ध किया जिनमें बच्चों को गुणा और भाग का उपयोग करना पड़ सकता है।

4) इस बात को रेखांकित किया कि इन संक्रियाओं का ऐल्गोरिद्म काफ़ी सारी गतिविधियों के ज़रिए बताया जानी चाहिए।

इस इकाई के दौरान हमने गुणा और भाग सिखाने के कई बाल–केन्द्रित, गतिविधि–आधारित तरीक़ों पर विचार किया। हम उम्मीद करते हैं कि इस चर्चा से आपको ऐसी कई गतिविधियां विकसित करने तथा बच्चों के साथ उन्हें आज़माने की प्रेरणा मिलेगी।