डिप्लोमा इन एजुकेशन (डी.एड.)

(शिक्षा में पत्रोपाधि)

विषय – गणित व गणित शिक्षण

प्रथम वर्ष

प्रकाशन वर्ष 2010

राज्य शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्,

शंकरनगर, रायपुर, छ.ग.

प्रकाशन वर्ष 2010

राज्य शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् रायपुर छत्तीसगढ़

संरक्षक एवं मार्गदर्शक

संचालक राज्य शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् रायपुर छत्तीसगढ़

तकनीकी सहयोग एवं सामग्री संकलन

विद्या भवन सोसाइटी उदयपुर, छत्तीसगढ़ शिक्षा संदर्भ केन्द्र रायपुर,

समन्वय

आर.के. वर्मा, सहायक प्राध्यापक

एवं

डेकेश्वर वर्मा, प्रधानाध्यापक

विशेष सहयोग

श्री यू.के. चक्रवर्ती, सहायक प्राध्यापक

विषय संयोजक

डॉ सुधीर श्रीवास्तव सहायक प्राध्यापक

राज्य शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् रायपुर उन सभी लेखकों/प्रकाशकों के प्रति अपनी कृतज्ञता ज्ञापित करता है जिनकी रचनाएं आलेख इस पुस्तक में समाहित है।

प्रकाशक – **छत्तीसगढ़ पाठ्यपुस्तक निगम रायपुर**

प्राक्कथन

विद्यालय में अध्ययनरत् बच्चे भविष्य में राष्ट्र के स्वरूप व दिशा निर्धारण करेंगे। शिशुकरण बच्चों को कुम्हार की भाँति गढ़ता है और वांछित स्वरूप प्रदान करता है इस गुरूतर दायितव के निर्वहन के लिए शिक्षकों को बेहतर तरीके से तैयार करना होगा।

''शिक्षा बिना बोझ के'' यशपाल समिति की रिपोर्ट (1993) ने माना है कि शिक्षकों की तैयारी के अपर्याप्त अवसर से स्कूल में अध्ययन अध्यापन की गुणवत्ता प्रभावित होती है। इन कार्यक्रमों की विषयवस्तु इस प्रकार पुननिर्धारित की जानी चाहिए कि स्कूली शिक्षा की बदलती आवश्यकताओं के संदर्भ में उसकी प्रासंगिकता बनी रहें। इन कार्यक्रमों में प्रशिशुओं में स्वशिक्षक और स्वतंत्र चिंतन की क्षमता के विकास पर जोर होना चाहिए।

कोठारी आयोग (64.66) से ही यह बात की जाने लगी थी कि शिक्षा में गुणात्मक सुधार के लिए शिक्षकों को बतौर पेशेवर तैयार करना अत्यंत जरूरी है।

राष्ट्रीय पाठ्यचर्या 2005 ने भी शिक्षकों की बदलती भूमिका को रेखांकित किया है। आज एक शिक्षक के लिए जरूरी है कि वह बच्चों को जाने, समझे, कक्षा में उनके व्यवहार को समझे, उनके सीखने के लिए उपयुक्त माहौल तैयार करें, उनके लिए उपयुकत सामग्री व गतिविधियों का चुनाव करें, बच्चे की जिज्ञासा को बनाए रखे, उन्हें अभिव्यक्ति का अवसर प्रदान करें व उनके अनुभवों का सम्मान करें।

तात्पर्य यह कि आज की जटिल परिस्थितियों में शिक्षकों की भूमिका कही अधिक उत्तरदायित्वपूर्ण व महत्वपूर्ण हो गई है। इसी परिपेक्ष्य में सेवापूर्ण प्रशिक्षण को और कारगर बनाने की आवश्यकता है। शिक्षक शिक्षा में आमूल चूल बदलाव की आवश्यकता बताते हुए राष्ट्रीय पाठ्यचर्या 2005 में शिक्षकों की भूमिका के संबंध में कहा गया है कि सीखने सिखाने की परिस्थितियों में उत्साहवर्धक सहयोगी तथा सीखने को सहज बनाने वाले बने जो अपने विद्यार्थियों को उनकी प्रतिभाओं की खोज में उनकी शारीरिक तथा बौद्धिक क्षमताओं को पूर्णता तक जानने में, उनमें अपेक्षित सामाजिक तथा मानवीय मूल्यों व चरित्र के विकास में तथा जिम्मेदार नागरिकों की भूमिका निभाने में समथ्र बनाएं।

प्रश्न यह है कि शिक्षक को तैयार कैसे किया जाए। बेहतर होगा कि विद्यालय में प्रवेश के पूर्व ही उसकी बेहतर तैयारी हो, उसे विद्यालय के अनुभव दिए जाए। सेवापूर्व प्रशिक्षण के पाठ्यक्रम व विषयवस्तु को फिर से देखने की जरूरत है। इसी परिपेक्ष्य में डी.एड. के पाठ्यक्रम में बदलाव किया गया है।

पाठ्यसामग्री का फोकस शिक्षक विधि से हटकर शिक्षा की समझ, विषयों की समझ, बच्चों के सीखने के तरीके की समझ, समाज व शिक्षा का संबंध जैसे पहुलओं पर केन्द्रित है। पाठयक्रम में शिक्षण के तरीकों पर जोर देने के स्थान पर विषय की समझ को महत्व दिया गया है। शिक्षा के दार्शनिक पहलू को समझने, पाठ्यचर्या के आधारों को पहचानने और बच्चों की पृष्ठभूमि में

अनुक्रमाणिका

		पृष्ठ संख्या
इकाई – 1	बेकसूर गणित	01–38
	गणित क्या है, कहाँ से आया है	
	सीखने वालों की पहचानें	
	सीखने वाले के बारे में विचार	
इकाई – 2	वैदिक गणित –	39–51
इकाई – 3	जड़ में है गिनती	52–78
	गिनना कैसे सिखायें	
	इकाई दहाई और आगे	
इकाई – 4	पहला और आखिरी गणित	79–110
	जोड़ना और घटाना	
	गुणा और भाग करना	
इकाई – 5	टुकड़े या पूरे	111–156
	किस पूर्ण के हिस्से	
	भिन्न की किस्सें, दशमलव	
इकाई – 6	जगह की समझ	157–206
	जगह की समझ, कोण मापणा	
	मापन की शुरूवात	
इकाई – 7	बच्चे और गणित	207–233
	बच्चों की गणित सीखने में मदद	
	कक्षा का काम काज	
इकाई – 8	अभ्यासों पर सुझाव –	234–272

वैदिक गणित

अभ्यासों पर सुझाव

बेकसूर गणित

पाठ – 1 **गणित क्या है, कहाँ से आया है?**

चारों ओर गणित – क्या हमारी सभी गतिविधियों में गणित शामिल है? – मनोरंजन के लिए गणित – सारांश।

पाठ – 2 **सीखने वालों को पहचानें**

बच्चों की सोच – बच्चे कैसे सीखते हैं? गणित सीखना – अपना–अपना तरीका – गणित की भाषा – अपने पर भरोसा – लगातार विकास – संक्रियात्मक अवस्थाएँ – हर बच्चा अनूठा।

पाठ – 3 **सीखने वालों के बारे में विचार**

सीखने वालों के बारे में विचार – क्या बच्चे बड़ों की नकल करके सीखते हैं? – क्या बच्चे खाली स्लेट हैं? – क्या बच्चे सीखने को उत्सुक हैं? – कुछ और उदाहरण – सारांश।

बर्नार्ड शॉ का लिखा एक मशहूर नाटक है, जिसमें एक दयालु अमीर जनाब का दिल सड़क पर फूल वगैरह बेचती एक एलीज़ा नाम की बच्ची को देखकर पसीज जाता है। वे उसे अपने घर ले आते हैं और उसकी देखभाल और पढ़ाई करवाना शुरू करते हैं। होनहार बच्ची चमकने लगती है। एक दिन जनाब उसे गद्य और पद्य का भेद समझा रहे थे। दोनों में शब्द हैं, दोनों बोले और लिखे जाते हैं – तो फर्क क्या है? जनाब झुँझलाकर समझाते हैं कि – देखो, जो बातें तुम करती हो वे गद्य हैं, और जो अलग किस्म की बातें मैं तुम्हें सिखाऊँगा वे पद्य हैं। अच्छा, बच्ची बोली, मैं नहीं जानती थी कि मैं बचपन से गद्य बोल रही हूँ।

दूसरी तरफ

एक और बात यह है– ''गणित पढ़ना, पढ़ाना मुश्किल नहीं है। सिर्फ बात यह है कि बच्चे पूरा ध्यान नहीं लगाते। पहाड़े नहीं याद रखते। अपना होमवर्क पूरी तरह नहीं करते। इसीलिए गणित में कम नम्बर आते हैं।''

जन्म के पहले हफ्ते में बच्चा एक और दो का मतलब समझ सकता है, और तीन महीनों में एक, दो, तीन और ''ज्यादा'' समझ लेता है– साथ ही दूर, पास, का भेद, और कम और ज़्यादा का भेद। पहली क्लास में का बच्चा गोला चौकोर, तिकोने खिलौनों को एक–दूसरे पर रखकर इमारतें बना चुका होता है, गेंद को ज़मीन पर उछालकर पकड़ना सीख चुका होता है, जमीन पर ''स्टापु'' का खेल बनाकर उस पर एक/दो कदम रखकर आगे और पीछे जा चुका होता है, तीन पहिये वाली साइकिल बखूबी चला सकता है। यानि, अपनी बढ़त में कुदरती तौर पर गिनती, जोड़–घटा, गुणा–भाग, ज्योमेट्री के मोटे नियम और शायद अलजेब्रा की मूल सोच भी हासिल कर चुका होता है और ये सब, सिर्फ ''गणित'' की बातें हैं। इनके अलावा व बहुत और कुछ भी समझ चुका होता है। यह सब पहली क्लास में पहुँचने से पहले और पहली क्लास से ही उसे $2 \times 1 = 2$, $2 \times 2 = 4$, $2 \times 3 = 6$ बोर्ड से देखकर पूरी क्लास के साथ जोर–जोर से बोलकर रटना पड़ता है, दिन पर दिन रटना सीखना पड़ता है। उसकी भोली निगाहें हैरान देखती हैं कि स्कूल गणित कुछ और ही हैं। कुदरती दुनिया से कोसों दूर! कसूर किसका है? एलीज़ा के गद्य की तरह हर बच्चा बचपन से ही गणित सीखकर अपने जीवन में गणित का इस्तेमाल भी कर चुका होता है।

खैर! अगर बच्चों की कुदरती समझ में ही गणित है तो फिर इतनी क्लासें, किताबें, इम्तहान, किसलिए हैं?

इस सवाल के जवाब के लिए यह देखना जरूरी हो जाता है कि गणित आया कहाँ से है, क्यों आया है। यानि मनुष्य के जीवन में इसका इस्तेमाल कहाँ–कहाँ होता है? यह मज़ेदार सवाल हमें इंसान के इतिहास में ले जाता है। और इतिहास में जाकर हम यह देखते हैं कि जैसे ही आदि इंसान ने शिकार का सहारा छोड़कर खेती करनी शुरू की तब से ही गणित शुरू हुआ (और विषयों के साथ–साथ)। व्यापार में जोड़–घटा, गुणा–भाग के साथ–साथ पहाड़ों का इस्तेमाल होना शुरू हुआ। मकान बनाने के लिए ज्यॉमेट्री शुरू हुई, टिगोनोमेट्री शुरू हुई, अलजेब्रा शुरू हुआ, आदि। सभ्यता के साथ–साथ गणित भी बढ़ता गया और आज भी बढ़ता जा रहा है।

बात थोड़ी और भी गहरी है। अगर पदार्थ में वजन नहीं हाता, यानि पृथ्वी/बह्माण्ड में गुरुत्वाकर्षण (gravitation) का गुण नहीं होता, तो क्या पानी की बूंद गोल होती? क्या पिथागोरस का सिद्धान्त सही होता? क्या पृथ्वी में जीन शुरू होने का पहला कदम, यानि एक जीवाणु का सेल बनना मुमकिन होता?

दूसरे शास्त्रों की तरह गणित भी पदार्थ, पृथ्वी बह्माण्ड की अंदरूनी बनावट के नियम जाहिर करता है। यानि अंक, कोण, दशमलव आदि गणितीय मुद्दों के आपसी संबंध, हमारे बह्माण्ड के चरित्र को उजागर करते हैं और इसीलिए गणित को बचपन की कुदरती समझ तक ही नहीं रोका जा सकता। उसके गहरे नियमों की पड़ताल जरूरी हो जाती है और यही है गणित पढ़ाने का मकसद। रटंत नहीं, सृष्टि के अंदरूनी नियमों की तलाश।

पाठ–1

गणित क्या है? कहाँ से आया है?

हमारे जीवन में गणित

जीवन में गणित संबंधित आपके प्रमुख अनुभव क्या हैं? हममें से बहुत से लोगों के लिए गणित सिर्फ एक विषय है जो स्कूल में पढ़ाया जाता है। लेकिन क्या हमारे जीवन में सिर्फ वही गणित हैं? क्या उन लोगों का गणित से सामना नहीं होता है जो कभी स्कूल नहीं जाते? आइए देखें।

गणित हमारे चारों ओर है

जब आप सुबह उठते हैं तो सबसे पहले क्या करते है। क्या अपने लिए एक प्याला अच्छी सी कॉफी या चाय बनाते हैं ? यदि ऐसा है, तो आप गणित का प्रयोग कर रहे हैं! क्या आप इससे सहमत हैं?

एक बढ़ई को लीजिए जो एक मेज बना रहा है। क्या वह किसी रूप में गणित का प्रयोग करता है? किसी दर्जी, ग्वाले, सब्जी खरीदने वाले या मिस्त्री को देखिए। क्या ये लोग किसी रूप में गणित का प्रयोग करते हैं ? जब हम रेल या बस से जाते हैं, या अपनी गाड़ी चलाते हैं या अपने बच्चे की स्कूल की फीस देते हैं तो हम गणित का प्रयोग करते हैं। चाय बनाना, उपग्रह को कक्षा में भेजना, इमारतें और पुल बनाना – क्या इनमें से कोई भी कार्य गणित का प्रयोग किए बिना किया जाता है?

और तरह–तरह के खेलों के बारे में आपका क्या विचार है ? एक क्रिकेट कप्तान ने एक बार कहा था कि यदि वह क्षेत्र रक्षकों को मैदान में ठीक तरह से खड़ा कर दे तो दूसरी टीम को 'आउट' करने का काम आधा हो जाएगा। और फील्ड सजाने के लिए खेल और जगह की अच्छी समझ की जरूरत होती है। खो–खो, कबड्डी, फुटबॉल, बास्केट बॉल आदि सभी में जगह को इस्तेमाल करने की सहज जानकारी की आवश्यकता होती है।

चित्र : 1 फुटबाल का खिलाड़ी गणित का प्रयोग करता है।

और शतरंज जैसे बोर्ड वाले खेलों को खेलते वक्त आपको जीतने की योजना के बारे में सोचने की आवश्यकता होती है। इसके लिए आपको हर समय मोहरों की संभावित चालों के बारे में सोचना पड़ता है। अठ्ठा चंगा, लूडो, चौपड़, व्यापार और इसी प्रकार के दूसरे खेलों में खिलाड़ी गणित का काफी प्रयोग करते हैं।

निम्नलिखित अभ्यास करते समय आप ऐसे बहुत से उदाहरण दे सकते हैं जिनमें हम गणित का प्रयोग करते हैं।

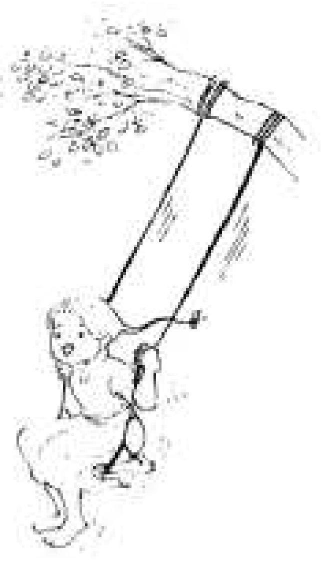
E1) एक भीतर और एक बाहर खेले जाने वाले खेल के बारे में सोचिए जो आप या आपके बच्चे खेलते हैं। बताइए कि उन्हे खेलने में गणित का किस तरह इस्तेमाल होता है।

E2) मेरा एक मित्र कहता है "रसोई में काम करते समय मैं गणित का बहुत इस्तेमाल करता हूँ।" ऐसे चार तरीके बताइए जिनमें रसोई में गणित का प्रयोग होता है।

E3) एक मित्र से बातचीत में मैंने कहा, "गणित हमारे चारों ओर पाई जाने वाली लगभग हर चीज में है। रंगोली की रचना, कपड़ों के डिजाइन और छापे, नृत्य, बच्चों को खिलाना–पिलाना और रेल पकड़ना सभी में गणित का प्रयोग होता है।" वह इस बात से बिलकुल असहमत थी और उसने कहा – "तुमने जो बात कही है उनमें से कुछ में शायद गणित का कुछ इस्तेमाल होता है। लेकिन हर बात में गणित का इस्तेमाल नही होता।" क्या आप मुझसे सहमत हैं या मेरे मित्र से ? और क्यों ?

लता अपने घर के सामने वाले पेड़ पर एक झूला डालकर उस पर झूलना चाहती है। इसके लिए क्या उसे गणित की जरूरत है ? झूला डालने के लिए उसे एक रस्सी की और पेड़ की एक उचित डाल की जरूरत होगी। इससे संबंधित उसे कई प्रश्न पूछने की जरूरत है, जैसे :

1. डाल कितनी ऊँची होनी चाहिए?
2. वह कितनी मजबूत होनी चाहिए?
3. जब कोई झूला झूलेगा, तो क्या दूसरी डालें बाधा नही डालेंगी ?
4. रस्सी कितनी लम्बी होनी चाहिए? क्या रस्सी की लम्बाई का डाल की ऊँचाई से कोई संबंध है?
5. रस्सी कितनी मोटी होनी चाहिए?
6. क्या लता और उसकी सहेली साथ–साथ झूल सकते हैं ?



चित्र 2: लता द्वारा अनजाने में गणित का प्रयोग

इन सब प्रश्नों के उत्तर के लिए लता को गणित का ज्ञान होना जरूरी है। उदाहरण के लिए प्रश्न 3 के उत्तर के लिए, उसे ज्यामिति की कुछ समझ होनी चाहिए। उसे अपने मन में यह अंदाज लगाना होगा कि जब झूला, ऊपर–नीचे जाएगा तब रस्सी कितना घूमेगी, और यह तय करना होगा कि पेड़ की कोई दूसरी डाल झूले में कोई बाधा तो नही डालेगी।

मान लीजिए लता अपना झूला डालने में सफल हो जाती है। अगर उसे कोई झुलाने वाला न हो तो वह रस्सी को खींचकर अपने पैरों से, खुद धक्का देकर और अपने शरीर को झूले पर एक समान गति से हिलाते हुए झूले को चला सकती है। जैसे–जैसे झूला ऊपर–नीचे जाना शुरू करता है उसे झूले की गति और लय के साथ–साथ हिलना पड़ता है, और इस तरह से जोर लगाना पड़ता है कि झूला और ऊपर जाए।

इस प्रकार, झूले को डालने और इस्तेमाल करने में लता अपने अनुभव से **बहुत सी ऐसी राशियों का अनुमान लगाती है जिनकी गणना गणितीय तरीके से की जाती है।** वह अंदाज लगाती है, उनकी जाँच करती है और यह तय करती है कि उन्हे इस्तेमाल किया जाए या नए अंदाजे जाए। यह सब गणित वह यह महसूस किए बिना करती है कि वह गणित कर रही है इसलिए वह ये सब बिना किसी थकान और ऊब के करती है।

E4) ऊपर दिए गए प्रश्नों का उत्तर देने के लिए लता को गणित के किन क्षेत्रों की जानकारी होनी चाहिए? चुनने का कारण भी दीजिए।

E5) (i) राशियों के अनुमान लगाना, और/या

(ii) संबंधों का दर्शाना, और/या

(iii) नमूनों को समझना,

इनके उदाहरण निम्नलिखित स्थितियों में दीजिए :

क) हरी जयपुर में रहता है और उसे 23 मार्च को 10.00 बजे (प्रातः) तक दिल्ली पहुंचना है।

ख) सुरेश स्वेटर बुनना चाहता है।

अब तक आपने समझ लिया होगा कि गणित केवल स्कूल की पाठ्य पुस्तकों तक सीमित नहीं है। वास्तव में, हम गणित को अपने चारों ओर देख सकते हैं। लेकिन, क्या यह उन सभी कामों में है जो हम करते हैं? आइए, देखें।

क्या हमारी सभी क्रियाओं में गणित शामिल हैं?

इसका उत्तर ''हाँ'' है और ''नहीं'' भी। उन लोगों के लिए, जो गणित को तलाशते हैं और जो जानते हैं कि इसे कहाँ तलाशना है, उत्तर ''हाँ'' है। जो लोग इसे नहीं तलाशते हैं, उनके लिए गणित केवल वही है जो स्कूल में करते हैं, जिसका उनकी वास्तविक दुनिया से कोई संबंध नहीं होता है। दूसरे शब्दों में, गणित ज़मीन पर पड़े हुए रोड़ों या पत्तियों की तरह नहीं है जो उठाए जाने का इंतजार करते हैं। इसको खोजने के लिए सतह के नीचे तक जाना होगा।

इसको समझने के लिए आइए चपाती बनाने का उदाहरण लें। मेरा एक दोस्त प्रकाश कहता है कि चपाती पकाने में बहुत से रसायन विज्ञान का इस्तेमाल होता है। उसका क्या मतलब है? उसके अनुसार, जब चपाती पकाई जा रही होती है तो ऐसे रासायनिक परिवर्तन होते हैं जैसे उसने स्कूल में ''रसायन विज्ञान की कक्षा'' में पढ़े थे।

लेकिन मेरी एक दूसरी दोस्त कहती है कि जब वह चपाती बनाती है तो वह ज्यादा रूचि उन आकारों में लेती है जो बेलते वक्त आटे से बनती है। उसे बेलन की चाल और इन आकारों के बीच संबंध ढूंढना भी अच्छा लगता है। इसलिए, जिस प्रक्रिया में उसे गणित नजर आता है बिल्कुल उसी प्रक्रिया में प्रकाश को रसायन विज्ञान नजर आता है।

यह उदाहरण बताता है कि किसी भी कार्य घटना या तथ्य को अलग–अलग नज़रियों से देखा और समझा जा सकता है। यदि हम उसमें शामिल गणित की तलाश करेंगे, तो वह हमें मिलेगा। एक बार हम अपनी ''गणितीय आँखों'' को खोल लें और हम नियमों और नमूनों को देखना शुरू कर दें तो हम लगभग हर चीज़ में गणित देख सकते हैं– चाहे वह कोई गीत हो, कोई कहानी की किताब हो, भिनभिनाती हुई मक्खी का पथ हो, माचिस के डिब्बे का आकार और इसकी सतहों की संख्या हो, इन सतहों को ढकने के लिए जरूरी काग़ज का अनुपात हो, घर में बिजली के तार हों, पत्तियों के आकार हों, वगैरह।

विशेष रूप से, बच्चों की सभी गतिविधियाँ और अनुभव गणित से ओत–प्रोत होते हैं। **इन अनुभवों को उन गणितीय विचारों और संकल्पनाओं से जोड़ना चाहिए जो हम उन्हें पढ़ाते हैं।** तभी ये विचार उन्हें उपयोगी लगेंगे और वे इन्हें आसानी से समझ सकेंगे।

E6) निम्नलिखित गणितीय संकल्पनाओं से संबंधित बच्चों के जीवन से कम से कम एक–एक अनुभव बताइए।

जोड़, आयतन, सममिति, प्रायिकता।

अब तक आप यह जान गए होंगे कि आप जाने–अंजाने कितने गणित का इस्तेमाल करते हैं। निम्नलिखित उपभाग से शायद आपको कुछ अंदाज़ा हो जाए कि हम मनोरंजन के लिए गणित का कैसे प्रयोग कर सकते हैं।

मनोरंजन के लिए गणित

अक्सर जब मेरे पास खाली समय होता है तो मैं निम्न प्रकार के दिलचस्प गणितीय प्रश्नों को हल करने की कोशिश करती हूँ। कभी मेरे दोस्त और मैं प्रश्न बनाते है और कभी ये हमें मनोरंजक पुस्तकों में मिल जाते है। आप भी इन प्रश्नों को हल करने की कोशिश क्यों नहीं करते ? इन्हें आप अपने खाली समय में कर सकते है। शायद आपको भी मजा आए।

1) किसी गाँव में केवल एक नाई है। वह गांव के उन सब आदमियों की दाढ़ी बनाता है जो खुद अपनी दाढ़ी नहीं बनाते हैं। क्या नाई अपनी दाढ़ी बनाएगा ?

2) आपको एक लकड़ी का टुकड़ा दिया जाता है जिसमें तीन छेद हैं (चित्र 5 देखें)। छेदों के आकार एक वर्ग, एक त्रिभुज और एक वृत्त हैं। क्या आप लकड़ी के टुकड़े से एक ऐसा प्लग बना सकते हैं, जो तीनों में एकदम सही बैठे?

3) "जादुई वर्ग" .... को लीजिए। यदि आप इसकी किसी पंक्ति, या स्तंभ या विकर्ण की संख्याओं को जोड़ें तो उसका योग बराबर होगा। इस गुण के कारण इसे जादुई वर्ग (magic square) कहते हैं। क्या आप 1 से 16 तक की संख्याओं से 4 X 4 का एक जादुई वर्ग बना सकते हैं ?

4) वह बड़ी से बड़ी संख्या कौन सी है जो चार और 1 का प्रयोग करके लिखी जा सकती है? आप संख्याओं पर सभी संक्रियाओं का प्रयोग कर सकते हैं, लेकिन केवल अंक 1 का प्रयोग कर सकते हैं, और वह भी 4 बार। (उत्तर 1111 से बहुत बड़ा है।)

5) 24 लोगों को 6 पंक्तियों में इस प्रकार खड़ा करें कि प्रत्येक पंक्ति में 5 लोग हों।

क्या आपको इन्हें हल करने में मजा नहीं आया? जब मैं यात्रा करती हूँ, या काम में व्यस्त नहीं होती, तो मुझे ऐसे प्रश्न हल करने में बहुत मजा आता है। इसी प्रकार, बच्चो को भी ऐसी दिमागी क्रियाओं में उस वक्त तक मजा आता है जब तक ये पहेलियाँ उनकी समझ से बाहर न हो।

E7) बच्चों के लिए ऐसी तीन प्रश्न–पहेलियाँ बनाइए जिनसे उन्हें यह महसूस करने में सहायता मिले कि "गणित मजेदार है"। इन्हें अपने आसपास के बच्चों पर आजमाइए। पता लगाइए कि कौन सी उन्हें अच्छी लगी, और क्यों।

अभी तक हमने गणित के केवल एक पहलू के बारे में बात की है – हमारे दैनिक जीवन में इसकी उपयोगिता।

सारांश

इस इकाई में हमने निम्नलिखित बातों पर विचार किया है–

1. गणित हर जगह मौजूद है, शक्तिशाली है और सुंदर है।
2. यह जिन्दगी के हर क्षेत्र में उपयोगी है।
3. गणित का उपयोग विश्राम के समय मनोरंजन के लिए भी किया जा सकता है।

पाठ–2
सीखने वालों को पहचानें

परिचय

एक दिन मैंने छह साल के अहमद को अपनी बड़ी बहन से कहते हुए सुना, ''संतरे का बीज कभी भूल से भी मत खाना। अगर खा लिया तो इस बीज से तुम्हारे पेट में एक पौधा जो बड़ा होकर पेड़ बन जायेगा। फिर तुम्हारा पेट फट जायेगा।'' कितने अनोखे ढंग से अपनी बहन को यह बात समझा रहा था कि संतरे का बीज निगलना नुकसानदेह क्यो हो क्या इस बात को हम बड़े लोग भी ऐसे ही समझाते ? शायद नहीं। क्या इससे यह नहीं कि हम लोग बच्चों के सोचने–समझने के तौर तरीकों से लगभग अनजान है और इस बारे में अक्सर अपनी ही राय बना लेते हैं?

और फिर हममें से कितने लोग इन बातों के बारे में सोचते भी हैं कि प्राइमरी स्कूल के बच्चे सीखते कैसे हैं? स्कूल जाने से पहले से लेकर प्राइमरी स्कूल की पढ़ाई तक, क्या सभी का सीखने का रास्ता एक जैसा ही होता है? क्या सभी बच्चों का विकास एक ही तरह होता है? इस पाठ में हम इन्हीं सवालों पर गौर करेंगे।

यहाँ हम इस बात को जानने की कोशिश करेंगे कि बच्चे कितने अलग–अलग तरीकों से सीखते हैं। हम छोटे बच्चों के आम स्वभाव को समझने की कोशिश करेंगे। साथ ही यह भी समझेंगे कि बड़ों और बच्चों के सोचने में जो फर्क होता है। (audlt-child gap), वह बच्चों के प्रति बड़ों के रवैये को किस तरह ढालता है। **बच्चे इस दुनिया में आने के साथ ही सीखना शुरू कर देते हैं।** इसलिए स्कूल में दाखिल होने तक वे काफी बातें जान चुके होते हैं।

हम स्कूल जाने से पहले से लेकर प्राइमरी शिक्षा के दौरान बच्चों के विकास की प्रमुख अवस्थाएँ बच्चों के सामान्य संज्ञानात्मक (cognitive) विकास को दर्शाती हैं, यहाँ इनकी चर्चा हमने गणित सीखने/सिखाने के नजर की है। हमारी बातचीत का मुख्य मुद्दा यह है कि **स्कूल जाने से पहले से लेकर प्राइमरी शिक्षा अंत तक गणित सिखाते वक्त, सीखने वाले बच्चों के नजरिए को सबसे अहम मानना चाहिए,** न कि विषय–वस्तु को और सिखाने वाले के नजरिए को।

'संज्ञानात्मक' का मतलब है ज्ञान को सीखने, समझने और व्यक्त करने की प्रक्रिया से संबंधित।

इस पाठ में हम चाहते हैं कि आप निम्नलिखित सवालों पर सोचें – गणित के प्रति बच्चों के रवैये पर कौन सी बातें असर डालती हैं? बच्चे गणित से डरते क्यों हैं और गणित में दिलचस्पी लेना बंद क्यों कर देते हैं? स्कूली पढ़ाई इस रवैये को जन्म कैसे देती है या उस पर क्या असर डालती है?

अर्थात् प्राइमरी स्कूल के शिक्षक को उन बातों का खास ध्यान रखना चाहिए जो बच्चों के गणित सीखने और उसके प्रति उनके रवैये पर असर डालती हैं।

बच्चे कैसे सोचते हैं?

आपका अलग अलग उम्र के बच्चों से वास्ता पड़ा होगा। अपने अनुभवों से क्या आप मानते हैं कि बच्चे बहुत छोटी उम्र से ही सीखना शुरू कर देते हैं और सीखने का यह सिलसिला लगातार जारी रहता है ? या आप सोचते हैं कि जब बच्चे स्कूली पढ़ाई शुरू करते हैं तो वे एक 'खाली स्लेट' की तरह होते हैं और उन्हें सब कुछ स्कूल में ही सिखाया जाता है?

बच्चे किसी भी अनुभव या गतिविधि से सीखते हैं।

दरअसल **बच्चे उन सभी चीजों से सीखते हैं जिन्हें वे देखते हैं या अनुभव करते हैं।** स्कूल शुरू करने से पहले ही वे काफी कुछ सीख चुके होते हैं। और स्कूल में पढ़ाई करते हुए भी स्कूल के बाहर की दुनिया से

उनका सीखना जारी रहता है। अगर हम यह मानते हैं कि बच्चे सिर्फ स्कूल में सीखते हैं तो इसकी वजह यह है कि सीखने के बारे में हमारी समझ ही गलत होती है। जब कोई बच्ची किसी जिगसॉ पहेली (jigsaw puzzle) को हल करने में घंटों लगी रहती है तो बड़े लोग उसे अक्सर यही कह कर डांटते है कि वह वक्त बरबाद कर रही है। इन बड़े लोगों को शायद ही इस बात का अहसास होता है कि ऐसे ही खेलों से चीजों के आकारों (shapes and sizes) के बारे में उस बच्ची की समझ बेहतर हो रही है। और इस तरह से सीखने का काम बिना किसी औपचारिक पढ़ाई के, स्कूल के बाहर हो रहा है। बच्चों के सीखने के बारे में इस पहलू को नजरअंदाज करके अगर हम किन्हीं भी धारणाओं पर आधारित पाठ्यक्रम बनाते हैं तो गणित में या और किसी भी विषय में बच्चों की रूचि खत्म होना स्वाभाविक है।

जिगसॉ पहेली ऐसी पहेली है जिसमें बच्चें लकड़ी, गत्ते या प्लास्टिक के छोटे–छोटे टुकड़ों को जोड़कर कोई आकृति बनाते हैं।

जन्म लेते ही बच्चे अपने इर्द–गिर्द की दुनिया को महसूस करने लगते हैं और धीरे–धीरे उसके बारे में अपनी एक समझ बनाने लगते हैं। कुछ समय बाद वे लोगों और चीजों को पहचानना शुरू करते हैं। साथ ही वे अपने आसपास के माहौल से ज्यादा तालमेल बैठाने लगते हैं; देखकर, छूकर, सुनकर, चखकर और सूंघकर चीजों को महसूस करने लगते हैं।

जब कोई नन्हीं बच्ची जमीन पर चलते हुए उंगली से धूल उठाती है, या किसी छेद में उंगली डालती है, तब उसके दिमाग में क्या चल रहा होता है ? क्या उसके मन में कुछ सवाल नहीं उठ रहे होते और वह उनके जवाब पाने की कोशिश नहीं कर रही होती ? इस बारे में अपनी एक समझ बना कर क्या वह उसको परख नहीं रही होती ? यही न खत्म होने वाली उत्सुक खोजबीन करने की क्षमता और अपने आसपास की दुनिया को समझने की लगातार चाह ही है जो इस नन्हीं बच्ची को एक अन्वेषक, खोजी, निर्णय लेने वाली नन्हीं वैज्ञानिक बनाते हैं ठीक यही बात बड़े बच्चों पर भी लागू होती है।

चित्र 1 : ''क्या इसका स्वाद भी उस चीज के जैसा है जो मां ने सुबह मुझे खाने को दी थी?''

नीचे दिये गए अभ्यास से आपको बच्चों के बारे में इसी दिशा में और अधिक सोचने में मदद मिलेगी।

E1) अपनी जान पहचान के चार या पाँच साल के बच्चों के खोजबीन करने के कुछ उदाहरण दें?

बच्चों का दिमाग कैसे काम करता है, आइए अब इससे जुड़े एक और पहलू पर ध्यान दें।

(i) एक दिन चार साल का आकाश अपने पापा के साथ सैर पर गया। कुछ देर बाद उसने कहा, ''पापा मैं थक गया हूँ। चलो, वापस चलें।'' उसके पापा ने कहा, ''अभी से थक गए? आओं थोड़ी दूर और चलते हैं।'' उसके पापा ने यह नहीं सोचा कि जहाँ वे 75 कदम ही चले आकाश 225 कदम चल चुका था।

(ii) आठ वर्ष के राहुल को उसका अध्यापक बहुत मारता था। तंग आकर उसने एक दिन अपनी मां को कहा, ''मैं स्कूल नहीं जाऊंगा।'' मां ने कुछ न पूछकर, कहा ''ठीक है।'' उसने सोचा कि उसका बेटा रोज–रोज स्कूल जाने से ऊब गया है और यूं ही नहीं जाना चाहता। उसने यह जानने की कोशिश नहीं की कि राहुल को स्कूल में कोई परेशानी तो नहीं हो रही है।

बच्चों और बड़ों के सोचने का ढंग अलग होता है।

चित्र 2 – बड़ों और बच्चों के बीच की दूरी को कम करने की जरूरत है

क्या आप यह मानेंगे कि इन दोनों ही उदाहरणों में बड़े लोगों ने इस बात को समझने की कोशिश नहीं की कि बच्चे क्या कहना चाह रहे थे ? बच्चे क्या महसूस कर रहे थे और क्या कहना चाह रहे थे, इस बारे में उन्होंने अपनी समझ के मुताबिक बस अपनी राय बना ली थी।

गणित पढ़ाते हुए अक्सर आपका वास्ता ऐसी ही बातों से पड़ेगा। मिसाल के तौर पर, रोटी का आधा टुकड़ा मांगे जाने पर हो सकता है कि एक छोटी बच्ची छोटा–सा ही टुकड़ा दे। उसके लिए एक से कम कोई भी हिस्सा आधा है, और आधे का मतलब एक छोटा सा टुकड़ा भी सकता है। लेकिन ऐसे कितने बड़े लोग हैं जो बच्चों की सोच को समझने की कोशिश करते हैं।

E2) बच्चों और बड़ों के सोच में फर्क दिखाने वाले कुछ और उदाहरण दें।

E3) ऐसे उदाहरण दें जहाँ बड़े लोग अपनी सोच बच्चों पर लादते हैं।

E4) (क) प्राइमरी कक्षा में बड़ों और बच्चों के बीच की दूरी किन बातों में झलकती है?

(ख) ऐसी पांच बातें बताइए जिनसे शिक्षक होने के नाते आप इस दूरी को कम कर सकते हैं?

आइए, अब बड़ों और बच्चों की दूरी से जुड़े एक और पहलू को देखें। ज्यादातर पढ़े–लिखे लोगों के बच्चे घर पर ही अक्षर और गिनती बोलना सीख लेते हैं। कुछ मां–बाप तो इस बात की डींग भी हांकते हैं कि उनके बच्चों ने 3 या 4 साल की उम्र में ही 100 तक गिनती सीख ली। लेकिन, इस तरह के 'सीखने' का मतलब क्या है ? क्या इसका मतलब यह है कि बच्चे 100 चीजों को गिन सकते है? क्या वे 50 और 100 चीजों में फर्क समझ सकते हैं?

बार–बार दोहरा कर छोटे बच्चे क्या सीख रहे हैं? सिर्फ संख्याओं के ढेर सारे नाम, बिना उनका मतलब जाने। हालांकि संख्याओं के नाम जानना भी उनके बारे में सीखने का एक हिस्सा है, लेकिन बच्चे संख्याओं का मतलब सिर्फ इतने से ही नहीं समझ सकते।

जब कोई बड़ा यह मान लेता है कि सिर्फ संख्याओं का नाम जान लेने से बच्चे उनका मतलब समझ गए हैं, तब वह उन पर और बातों को (जैसे जोड़) ''सीखने'' के लिए भी जोर देते हैं। इन बच्चों को संख्या का मतलब ही समझने के लिए और वक्त की जरूरत होती है। लेकिन इन्हें उस बड़े से तारीफ की चाह भी तो होती है। इसलिए वे बिना समझे, सिर्फ याद करके जोड़ भी कर डालते हैं। इस तरह से **बड़ों की उम्मीदें, बच्चों के सही तरीके से सीखने में रूकावट बन जाती है।**

अफसोस की बात तो यह है कि ज्यादातर बच्चों से यही उम्मीद की जाती है कि वे मशीनी तरीकों से सही जवाब तक पहुँच जायें और रट–रटा कर कैसे भी बड़ों की उम्मीदों पर खरे उतरें। इस तरह तमाम स्कूली ज्ञान चीजों के बारे में एक सही समझ के बजाय, सिर्फ सूचना बनकर रह जाता है। यह बात पूर्व स्कूली बच्चों पर ही नहीं, बड़ी कक्षाओं में पढ़ रहे बच्चों पर भी लागू होती है। उदाहरण के लिए, हम लोग बच्चों को क्षेत्रफल के बारे में सिर्फ इतना बताते हैं कि ''लंबाई X चौड़ाई = क्षेत्रफल'' हममें से बहुत कम लोग बच्चों को यह समझाने की कोशिश करते हैं कि 'क्षेत्रफल' का असली मतलब क्या है। आप खुद भी ऐसा कई उदाहरण सोच सकते हैं।

E5) कक्षा 1 से कक्षा 5 तक हरेक कक्षा के लिए किसी भी अवधारणा का एक–एक उदाहरण दें जिसे उस कक्षा के बच्चे बिना समझे रट लेते हैं। यह भी बताइए कि रटते हुए वे उस अवधारणा के किन पहलुओं को नजरअंदाज कर देते हैं।

अभी तक हमने उन बातों पर सवाल उठाए हैं जो बच्चों के सीखने के ढंग के बारे में बड़े लोग मानते रहे हैं। इस ढंग से नही ं सीखते, तो फिर सवाल यह उठता है कि बच्चे सीखते कैसे है? आइए इस पर विचार करें।

बच्चे कैसे सीखते हैं?

कभी आपने एक छोटे बच्चे को यह समझाने की कोशिश की है कि ''लट्टू '' का क्या मतलब है? क्या आपने उसे सिर्फ जबानी बताया? या आपने बच्चे को लट्टू देकर, उसे चलाने, घूमते देखने और उससे खेलने का मौका दिया? अगर आपने दूसरा तरीका अपनाया तो आप जरूर बच्चे का समझा पाये होंगे कि लट्टू क्या होता है। लट्टू की आकृति, आकार, बनावट और अन्य गुणों के बारे में बच्चे उसे देखकर, छूकर और उससे खेलकर ज्यादा बेहतर सीखते हैं।

क्या इस उदाहरण से हमें कुछ संकेत मिला कि बच्चे कैसे सीखते हैं?

बच्चे अनुभव से सीखते हैं

सीखने के बारे में एक नजरिया यह है कि बच्चे चीजों पर तरह–तरह के प्रयोग करके उनके बारे में सीखते हैं। वे चीजों को उठाते हैं, फेंकते हैं, जोड़–तोड़ करते हैं और इस तरह उनके बारे में जानकारी हासिल करते हैं। चीजों को छूने और उनकी जाँच पड़ताल करने की बच्चों की स्वाभाविक इच्छा उन्हें उन चीजों के अलग–अलग पहलुओं को समझने में मदद देती है। इस तरह से वे चीजों के आकार, आकृति और अन्य गुणों के बारे में अपनी समझ बनाते हैं। इसके साथ–साथ वे चीजों के जगह से जुड़े गुणों (spatial properties) को समझ कर उनका इस्तेमाल कर सकते हैं, जैसे कौन सी चीज किस चीज के नीचे रखी जा सकती है, या उनके खिलौने डिब्बों में कैसे आ सकते हैं।

चित्र 3 : ''मैं तो सिर्फ कांच के बारे में जानना चाहता था।''

हां, यह बात जरूर है कि हर बार बच्चे यह बता न सकें कि उन्होंने समझा क्या है। उदाहरण के लिए वे गेंद और पत्थर में फर्क जानते भी हों और उसे दिखा भी पायें पर बता कर समझा न सकें। ठीक वैसे ही जैसे आप साइकिल चलाना जानते हों, तो भी क्या आप 10 वाक्यों में बता पायेंगे कि आप साइकिल कैसे चलाते हैं,

"बच्चे चीजों के बारे में अपनी समझ खुद बनाते हैं।"

चीजों को अनुभव करते हुए और उनके बारे में सोचते हुए बच्चे और भी बहुत कुछ कर रहे होते हैं। खेलकूद और बड़ों से मेलजोल के दौरान बच्चों का कई तरह की अवधारणाओं और कौशलों से वास्ता पड़ता है। और इन पर वे तरह–तरह से महारत हासिल करने की कोशिश करते हैं। जैसे कि– 'आधे' का मतलब समझाने के लिए अगर बच्चों को तरह–तरह की चीज आधे में बांटने को कहा जाये तो वे धीरे–धीरे 'आधे' की अवधारणा की समझ बनाएंगे।

विश्लेषण : *किसी चीज को या प्रक्रिया को छोटे–छोटे हिस्सों में बांटना और उन हिस्सों को समझ कर उस पूरी चीज या प्रक्रिया को समझना।*

संश्लेषण: *किसी चीज या प्रक्रिया के छोटे–छोटे हिस्सों को एक साथ रख कर (जोड़कर) चीज या प्रक्रिया को उसके पूरे रूप में समझना।*

इस तरह अलग–अलग गतिविधियों को करते हुए, बच्चे उनका विश्लेषण और संश्लेषण भी करते हैं। इसी प्रक्रिया में वे अपने इर्द–गिर्द की दुनिया की समझ बनाते हैं।

अब एक अभ्यास करके यह जानें कि आपने बच्चों के सीखने के तरीकों के बारे में क्या समझा।

E6) आपकी समझ से, छोटे बच्चों के बारे में नीचे दिये गए कथनों में से सही कथन के लिए (✓) और गलत के लिए (×) लिखें।

(क) बच्चे जितना बता पाते हैं, उससे ज्यादा जानते हैं।

(ख) जब बच्चे स्कूल जाना शुरू करते हैं तब वे गणित बिल्कुल नहीं जानते।

(ग) गिनती कर पाने का मतलब है कि संख्याओं के नामों को एक क्रम में बोलना।

(घ) अगर कोई बच्ची किसी अवधारणा को समझाने के लिए सही शब्द का इस्तेमाल करती है, तो इसका मतलब है कि वह उस अवधारणा को समझती है।

आइए अब बच्चों की गणित सीखने की क्षमता पर चर्चा करें।

गणित सीखना

बच्चे गणित की अवधारणाओं को कैसे सीखते हैं ? क्या किसी भी अवधारणा को किसी भी स्तर पर इस तरह से पेश किया जा सकता है कि बच्चे को उसके बारे में कुछ तो समझ में आ जाए? अगर ऐसा है, तो हमें बच्चे के विकास के स्तर के मुताबिक ही वह अवधारणा उसके सामने रखनी होगी। हमें यह जानना होगा कि उस अवधारणा को सीखने के लिए बच्ची किस हद तक तैयार है, या नहीं है। जैसे कि जोड़ने और घटाने का संबंध समझने के लिए बच्चों को यह समझ में आना चाहिए कि सभी क्रियाएं, **प्रतिवर्त्य (reversible)** होती हैं। और यह वह तभी समझ सकेंगे जब उन्हें **सरंक्षण (Conservation)** की समझ हो।

प्रतिवर्त्यता का सिद्धान्त : यदि किन्हीं चीजों पर की जा रही क्रियाओं का क्रम ठीक उलट दिया जाये तो उलटे क्रम में की जा रही क्रियाएं उन चीजों को वापस उनकी मूल अवस्था में पहुंचा देती है।

संरक्षण का सिद्धान्त : किसी भी चीज की मात्रा (गिनती, द्रव्यमान, द्रव) वही बनी रहती है भले ही उसकी जगह या उसका आकार बदल दिया जाये।

यह जानने के लिए कि बच्चे को गिनती के संरक्षण की समझ है या नहीं, आम तौर पर निम्नलिखित प्रयोग किया जाता है :

पहले, बच्ची को बराबर लंबाई की दो पक्तियों (लाइनों) में रखे बटन दिखाये जाते हैं, जहां दोनों लाइनों में एक जितने ही बटन है। बच्ची के सामने ही एक लाइन (नीचे दी हुई लाइन) के बटन फैला कर रख दिये जाते हैं। दूसरी लाईन (लाइन ख) को वैसे ही छोड़ दिया जाय तब बच्ची से पूछा जाता है कि दोनों लाइनों में रखे बटन गिनती में बराबर है या नहीं।

क • • • • • • •

ख • • • • • • •

स्विट्रलैंड के मनोवैज्ञानिक **जां प्याजे** (Jean Piaget) (1896–1980) के अनुसार :

जो बच्चे संरक्षण समझते हैं, वे कहते हैं कि दोनों लाइनों में बटनों की संख्या बराबर है क्योंकि आपने न तो लाइन ख से बटन उठाये हैं न ही लाइन क में बटन रखे हैं। वे यह भी तर्क देते हैं कि लाइन क के बटन ऐसे पास भी लाए जा सकते हैं जिससे कि दोनों लाइनों में बटनों की स्थितियाँ ठीक एक–सी हो जायें। यह तर्क दिखाता है कि इन बच्चों में अपने सोच की प्रक्रियाओं को प्रतिवर्तित करने की क्षमता है।

इस प्रयोग में बच्ची और बड़े (प्याजे) के बीच हो रही बातचीत में बड़ा, बच्ची की बात को सुनने और समझने के लिए तैयार था। साथ ही वह उसे सोचने के लिए भी प्रेरित कर रहा था। वह उसे सोचने समझने वाली एक स्वतंत्र इंसान मान कर चल रहा था। **ऐसे अनुभवों से बच्चे यह सीखते हैं कि कारण कैसे बताए जाएं और तर्क कैसे दिए जाएं।** जब बच्चे इस तरह के कई अनुभवों से गुजरते हैं, तब उनमें धीरे–धीरे गणितीय ढंग से सोचने की क्षमता विकसित होती है।

E7) किसी अवधारणा की समझ को विकसित करने के लिए, ऊपर दिये गए उदाहरण की तरह बड़े और बच्चे की बातचीत का एक उदाहरण दें।

जैसा कि आप जानते हैं, औपचारिक गणित में बड़े पैमाने पर प्रतीकों और ऐल्गोरिद्मों (algorithm) का इस्तेमाल होता है।

उदाहरण : कक्षा 4 की शिक्षक अपनी कक्षा को भिन्न (fraction) पढ़ाने जा रही थीं। सत्र की शुरूआत में उन्होंने बच्चों से पूछा ''अगर तुम्हारे पास तीन चॉकलेट हों और तुम्हें इन्हें पाँच लोगों में बराबर–बराबर बाँटना हो, तो तुम यह काम कैसे करोगे?'' ज्यादातर बच्चे इस काम को करने के लिए एक से ज्यादा तरीके सोच सके। सत्र के अंत तक, जब बच्चों को भिन्न पढ़ा दिए गए थे, तो शिक्षक ने फिर वही सवाल पूछा। और इस इस बार ज्यादातर बच्चे इस काम को नहीं कर सके! वास्तविक अनुभवों और व्यावहारिक बुद्धि की जगह अब उनके पास कुछ ''सूत्र'' थे, जो उन्हें न तो कभी समझ में आए और न ही वे यह याद रख सके कि उन सूत्रों का इस्तेमाल कैसे किया जाए।

यह उदाहरण बताता है कि बच्चों को सिर्फ कुछ बने बनाये सूत्र दे देना, बिना यह समझाए कि वे सूत्र कारगर हैं, अक्सर उनके सोचने में रूकावट डालता है। कई दफा, अगर बच्चों की अपने आप पैटर्न देखने दिया दिया जाए तो वे बड़ी आसानी से अंकगणित के उन सूत्रों को सीख लेते हैं जो आप उन्हें सिखाना चाहते हैं।

और जहां तक प्रतीकों का सवाल है, प्रयोगों से पता चलता है कि 9 साल तक के बच्चों को भी जोड़ और घटा को प्रतीकों (+ और –) द्वारा दिखाने में मुश्किल होती है। प्राइमरी स्कूल के ज्यादातर बच्चे आम तौर पर अंकगणित की संक्रियाओं के लिए इस्तेमाल होने वाले प्रतीकों से परेशान रहते हैं। ऐसा इसलिए है कि प्रतीक व एल्गोरिद्म बच्चों को ऐसे पढ़ाये जाते हैं कि उन्हें उसमें कोई तुक नहीं नजर आता, क्योंकि वे उनके अनुभव से बिल्कुल जुड़े हुए नहीं होते। इसलिए प्रतीकों का इस्तेमाल करने में बच्चों को दिलचस्पी नहीं होती।

बच्चे को अमूर्त अवधारणाओं से सीखाने के लिए सबसे पहले तो हमें यह याद रखना होगा कि सिर्फ बताने से हमें अनजाने प्रतीकों का वास्तविकता से संबंध जोड़ने में दिक्कत होती है, चाहे इसके बारे में हमें कितनी भी बार क्यों न बताया जाए। हमें इसके ठीक उल्टा चलना चाहिए, यानी **वास्तविक उदाहरणों से शुरू करके प्रतीकों की तरफ बढ़ना चाहिए।** दरअसल बच्चों को सिखाने का सबसे आसान तरीका यही है कि अमूर्त अवधारणाओं और प्रतीकों को उनके रोजाना के अनुभवों से जोड़ा जाए।

E8) आधार 5 में 4 और 5 जोड़िए। इस सवाल को समझने के लिए आप किन प्रक्रियाओं से गुजरे? आपको क्या मुश्किलें पेश आईं? आपके ख्याल में जो बच्ची गणित सीखना शुरू करती है, उसका काम इससे ज्यादा मुश्किल होता है या कम?

इस अभ्यास को करते हुए क्या आपको यह लगा कि आपके पास इसे करने के लिए जरूरी जानकारी नहीं हैं ? इस वजह से आपको इसे करने में कितनी मुश्किल हुई? इन सवालों से निकलने वाली बात महत्वपूर्ण है। वह यह है कि **सीखने वाले बच्चे किसी अवधारणा या किसी को समझने के लिए कितने तैयार हैं।** मिसाल के तौर पर, कक्षा 2 के बच्चे 26 लिख व पहचान सकते हैं और यह भी बता सकते हैं कि वह 62 से छोटा है। लेकिन वे ठीक नहीं समझ पाते कि 26 में 2 का मतलब 20 हैं। पर इनके शिक्षक अक्सर यह मान लेते हैं कि बच्चों को स्थानीय मान (place vlaue) का मतलब समझ में आ गया है और उन्हें मानक ऐल्गोरिद्म का इस्तेमाल करके ''बड़ी'' संख्याओं वाले सवाल हल करने को दे देते हैं। दरअसल, सवालों को हल करने के तरीके बच्चों को सिखा कर, जिनके लिए वे तैयार न हों, हम उनके सोचने में रूकावट डाल रहे होते हैं। इसकी वजह यह है कि ऐसा करने से वे बिना सोचे समझे सिर्फ मशीनी तरीके से जवाब पाने पर अपना पूरा ध्यान लगा देते हैं।

किसी खास अवधारणा/कौशल बच्चे तभी सीख सकते हैं, जब वे उनके लिए तैयार हों।

बच्चे अपने ही तरीकों से सीखते हैं

7 साल के विभोर से यह पूछा गया कि 'आठ चीजों की सात ढेरों' में कुल कितनी चीजें हैं उसने कहा उसे नहीं पता। उससे फिर पूछा गया, ''क्या तुम इसका जवाब मालूम कर सकते हो ?'' देर तक चुप रहने के बाद विभोर ने कहा ''56'', तुमने यह कैसे निकाला ?'' विभोर बताया, ''दस अट्ठे 80 होता है। उसमें से 8 घटाएं तो 72, फिर 8 घटाएं तो 64 और फिर 8 घटाएं तो 56 बचता है।''

कक्षा 3 की शान्ता से 189 – 67 हल करने को कहा गया। उसने कहा कि यह 3+30+89 है उसके इस तरीके को शिक्षक ने 'गलत' ठहराया क्योंकि उनका जवाब पाने का तरीका '189 से 7 घटाएं और फिर 60'

अगर इस तरह से बच्चों को अपने तरीकों से सवालों को हल करने से रोका जाए तो उनका सोचने, संबंध बनाने और गणित में पैटर्न पहचानने की क्षमता के विकास में रूकावट पड़ती है इसके बजाय वे समझते हैं कि गणित सीखने का मतलब है– एक–दूसरे से संबंध न रखने और बेतुके तथ्यों को सीखना या कुछ सूत्रों को रट–रटा कर लागू करना होता है। (जैसे– गणित के पहाड़े)।

अगर आप बच्चों को गणित के सवाल अपने तरीकों से करने दें, तो आपको उनके सोचने में अभूतपूर्व विविधता दिखाई देगी। ''बच्चों को गणित पढ़ाते हुए मुझे अक्सर इस बात पर हैरानी होती है कि बच्चे कितने अलग–अलग तरीकों से सवालों को हल करते हैं। सवाल और जवाब के बीच तर्कों का एक सिलसिला होता है।

जिन्हें बच्चे अक्सर खुद ही सोचते हैं मैंने एक बार बच्चों को दो अंको वाली दो संख्याओं को गुणा करना सिखाया। मैनें कुछ सवाल हल किए और कई बार ऐल्गोरिद्म समझाया। फिर मैंने उन्हें यह सवाल दिया:

$$\begin{array}{r} 1\ 2 \\ \times\ 1\ 3 \\ \hline \\ \hline \end{array}$$

सबसे पहले सवाल हल करने वाली बच्ची का जवाब था 156, उसकी कॉपी में सवाल के ठीक नीचे यह जवाब लिखा था। मैनें उसकी रफ कॉपी देखी तो उसमें 100 20 30 6 लिखा था। बार–बार पूछने पर बच्ची ने कहा, ''मैनें पहले 10 को 10 से गुणा किया, फिर 2 को 10 से, वगैरह।''

एक बार और मैं सरल ब्याज पर सवाल करा रही थी जिसमें ब्याज की दर निकालनी थी। बच्चों को सवाल दिए हुए मुझे कुछ देर हुई थी कि एक बच्चे ने हाथ उठा दिया। मुझे उसकी रफ्तार पर हैरानी हुई। मेरे पूछने पर उसने सही जवाब (5%) बताया। मैंने मन ही मन अपने आप को शाबाशी दी कि इतना मुश्किल ऐल्गोरिद्म मैंने इतनी सफलता से समझा दिया। अचानक मुझे ख्याल आया कि मैं उसकी कॉपी में देखूँ कि उसने सवाल को कैसे हल किया। मुझे यह शक भी था कि शायद उसे घर में यह सब सिखाया गया हो। पर बच्चे की कॉपी खाली थी। मैंने उससे पूछा कि उसने सवाल हल कहाँ किया था। उसने कहा, ''ओह! मैंने तो वही लिखा है जो आपने कल कहा था। आप ही ने तो कहा था कि जमा किए गए पैसे पर बैंक 5% ब्याज देते हैं ।''

इन दो उदाहरणों से आप किस नतीजे पर पहुँचे? क्या आप मानेंगे कि ये इस बात को साबित करते हैं कि **बच्चे अपने तरीकों से सवाल हल करते हैं ?** बड़ो की नजर में ये तरीके सही भी हो सकते हैं और गलत भी। पर बच्चों की नजर में वे हमेशा सही होते है। अपने गणितीय अनुभवों को समझने के लिए बच्चे अपने पुराने तरीकों को बदलते रहते हैं और उनके मुताबिक नए तरीके खोजते रहते हैं। सही माहौल मिले तो यह सिलसिला जारी रहता है और बच्चे को स्वाभाविक रूप से गणित समझने और गणितीय तौर पर सोचने के

लायक बनाता है। लेकिन अगर बच्चों पर एक ही तरीका थोपा जाए और अलग हट कर नए ढंग से कुछ करने की गुंजाइश न छोड़ी जाए तो धीरे–धीरे अपने तरीके निकालने और अवधारणाओं को समझने की उनकी अपनी क्षमता और इच्छा कम होने लगती है।

चित्र 4ः अपनी गणितीय सोच विकसित करते हुए एक बच्ची।

E9) अपने आसपास कुछ बच्चों को गणित का कोई सवाल दें। यह सवाल ऐसी किसी अवधारणा पर हो जिसके बारे में उन्हें पहले से हल करने के ढेरों तरीके या ऐल्गोरिद्म न बताए गए हों। क्या सभी बच्चे सवाल को हल करने के लिए एक ही तरीका अपनाते हैं ? वे किन–किन तरीकों से यह सवाल हल करते हैं ?

E10) यहां हम 4 सवाल दे रहे हैं। चार बच्चों ने इनमें से एक–एक सवाल, नीचे दिए गए तरीकों से हल किया। इन सवालों को हल करने के लिए बच्चों ने कौन–कौन से तरीके अपनाये?

(क) 8+6 = 8+2+4 = 14

(ख) 4+9 = 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13

(ग) 3+12 = 12, 13, 14, 15

(घ) 7+5 = 1+1 + …… + 1 (7 बार) +1+1+ ……..+ 1 (5 बार) = 12

इस तरह हम यह कह सकते हैं कि मानक ऐल्गोरिद्म बच्चों के सोचने और गणित के बारे में अपनी समझ बनाने में रूकावट डालते हैं। उनके चलते गणित महज प्रतीकों को मशीनी ढंग से इस्तेमाल कर पाने का सिलसिला बन कर रह जाता है। इस बात को वे लोग और भी बढ़ावा देते हैं जो बच्चों को सिर्फ किसी ऐल्गोरिद्म को लागू करने में मशीनी ढंग से लिखे गए चरणों के लिए नम्बर देते हैं।

बच्चों के गणित सीखने से जुड़ा एक और अहम पहलू भाषा का है। आइए देखें कि यह कैसे महत्वपूर्ण हैं।

गणित की भाषा बोलना

कक्षा 2 के शिक्षक संख्या 11 की मिसाल लेकर स्थानीय मान की अवधारणा समझा रहे थे। उन्होंने शुरूआत इस तरह की, "एक और एक ग्यारह होते हैं।" कुछ बच्चे, जिन्होंने अब तक यह सीखा था कि एक और एक दो होते हैं, एकदम चक्कर में पड़ गये। यह भ्रम कैसे पैदा हुआ? कहीं उस भाषा की वजह से तो नहीं जो शिक्षक ने इस्तेमाल की थी?

जाहिर है कि बच्चों को गणितीय अवधारणाएं समझाने के लिए भाषा की जरूरत होती है। वह खुद भी भाषा सीख रहे होते हैं। यानी गणित सीखते वक्त बच्चों को गणित के साथ–साथ भाषा को भी समझना होता है। इसलिए अगर आप यह पाते हैं कि कोई बच्चा गणित की किसी अवधारणा को नहीं सीख पा रहा है तो इसका कारण वह भाषा हो सकती है जो उसे अवधारणा सिखाने के लिए इस्तेमाल की जा रही है। हो सकता है कि वह भाषा ही भ्रम पैदा करने वाली हो।

"गणित की भाषा और भाषा के रूप में गणित, दोनों को समझने में बच्चों को काफी प्रयास करना पड़ता है।"

E11) अपने अनुभव से कुछ ऐसे उदाहरण दें जो भाषा के कारण बच्चों के गणित की अवधारणाओं को समझने में दिक्कतें पैदा करते हैं।

कभी–कभी कुछ बच्चे अपनी परिस्थितियों के कारण उन शब्दों को नहीं जानते जो किताबों में होते हैं या जिन्हें शिक्षक इस्तेमाल करते हैं। जैसे कि अगर उन्हें 'लघु', 'शेष', 'समान', 'भिन्न', 'गुणनफल', 'प्रत्येक' जैसे शब्दों के मतलब न मालूम हों तो इससे भी गणित समझने में रूकावट पड़ सकती है। साथ ही, जब एक ही गणितीय अवधारणा को अलग–अलग शब्दों से व्यक्त किया जाता है, तो भी वे चकरा सकते हैं। जैसे कि, घटाने की संक्रिया को व्यक्त करने के लिए 'घटा करो', 'अंतर निकालो', 'व्यवकलन करो', सभी इस्तेमाल किए जाते हैं।

बड़े बच्चों को भी अक्सर इस समस्या का सामना करना पड़ता है। ऐसा इसलिए है कि किसी भी स्तर पर गणित की अवधारणाओं को सिखाने के लिए इस्तेमाल की जाने वाली भाषा को समझने के लिए ही काफी कोशिश करनी पड़ती है। बच्चों को इस बात के लिए बढ़ावा देना चाहिए कि वे गणित की अवधारणाएं सीखते हुए उनके बारे में बात करें। इस तरह से गणित की भाषा सीखने और इस समस्या से निपटने में उन्हें मदद मिलती है।

कुछ बच्चे किसी इबारती सवाल (word problem) की लम्बाई और जटिलता से भी चकरा सकते हैं। जैसे कि यह सवाल लें, ''25 और 30 के बीच में वह कौन सी संख्या है जिसे 2 और 3 दोनों से पूरा–पूरा भाग नहीं दिया जा सकता ?'' यह वाकई एक जटिल सवाल है। बच्चों को यही सवाल अगर इस तरह दिया जाए – ''25 और 30 के बीच में एक संख्या है। इस संख्या को आप 2 और 3 भाग नहीं दे सकते। यह संख्या कौन सी है ?'' वह उसे यकीनन ज्यादा आसानी से समझ पाएंगे।

E12) गणित के नीचे दिए गए सवाल को कक्षा 2 के और कक्षा 4 के बच्चों को आप किन तरीकों से समझाएंगे?

''एक चौथाई, आधे से कम क्यों है?'' आप जिस भाषा का इस्तेमाल करते हैं, उस पर गौर करें।

अपनी काबिलियत पर भरोसा : सीखने में मददगार

अजय कक्षा 2 में पढ़ता है। उसके पिता अक्सर उस पर झल्लाते रहते हैं, ''तुम कितने बेवकूफ हो। तुम्हें इतना भी नहीं समझ में आता। यह तो तुम्हारी बहन भी समझ लेती है।'' आपकी राय में अजय को कैसा लगता होगा? और अगर उसकी बहन यह सुन ले तो उसे कैसा लगेगा?

हम सब की तरह **बच्चे भी तभी सबसे बेहतर ढंग से सीखते हैं जब उन्हें आप पर और अपनी काबिलियत पर पूरा भरोसा होता है।** जिस बच्चे को अपने आप पर भरोसा नहीं है, उसे यह फिक्र ज्यादा रहेगी कि वह शिक्षक को खुश नहीं कर सकती और वह उनकी नजरों में कमजोर साबित होगी। शिक्षक बच्चों की भावनाओं की कितनी कद्र करते हैं और बच्चों के लिए उनका रवैया क्या है, ये दोनों ही बातें बच्चों के सीखने पर गहरा असर डालती है। बच्चों को यह समझा कर कि वे क्या कर सकते हैं, वे क्योंकर 'सही' या 'गलत' हैं और उन्हें सवाल पूछने तथा अपने संशयों को दूर करने का मौका देकर हम उनमें आत्मविश्वास बढ़ा सकते हैं। यहां सबसे अहम् बात यह है कि शिक्षक को अपने सीखने वालों पर पूरा भरोसा होना चाहिए। इससे भी बढ़कर, वह उन्हें यह अहसास भी दिलाये कि उसे उनके सीखने की क्षमता पर पूरा भरोसा है।

जिन बच्चों को हमेशा यह फिक्र लगी रहती है कि उन्हें डांटा जाएगा या 'होशियार' बच्चों के मुकाबले नीचा दिखाया जाएगा, वे अपने में सिमट जाते हें। वे कोशिश करते हैं कि उन्हें सवालों के जवाब न देने पड़े। कक्षा में हो रही बातचीत में वे कोई हिस्सा नहीं लेते। और इस सबके पीछे सिर्फ यह डर होता है कि कहीं वे कोई

गलती न कर बैठे। इस तरह उनके आत्मविश्वास में कमी आ जाती है और उनमें खुद सोचने और सीखने की काबिलियत घटने लगती है। आजकल की प्रतियोगितात्मक शिक्षा प्रणाली में ज्यादातर बच्चों की यही समस्या है। ऐसे बच्चे मशीनी ढंग से ही, बिना सोचे–समझे चीजों को सीखते जाते हैं और सवाल हल करने के लिए गणितीय रूप से सोचने के बजाए ऐल्गोरिद्मों का इस्तेमाल करते हैं। उनमें यह बात जड़ पकड़ लेती है कि हर सवाल का 'एक ही सही जवाब' होता है। और इस तरह, उनमें सीखने और कुछ नया करने की इच्छा सदा के लिए मर जाती है।

इस उपभाग में हमने जो भी कुछ कहा है, क्या आप उससे सहमत है ? यह तय करने के लिए नीचे दिया गया अभ्यास आपकी मदद करेगा।

बच्चे भावनात्मक सुरक्षा देने वाले से ही सबसे बेहतर सीखते है।

E13) इस उपभाग में दिए गए कारणों की वजह से, क्या बचपन में आपकी या आपके मित्रों की किसी विषय में अरूचि पैदा हुई? ऐसे कुछ अनुभव लिखें। अगर आप अपने शिक्षक की जगह होते तो ऐसी स्थिति में क्या करते हैं?

ऊपर दिए गए अजय की बहन के उदाहरण में एक और अहम् सामाजिक रवैया झलकता है, खासकर इस तरह की बातों में कि, ''लड़की होते हुए भी तुम्हारा गणित इतना अच्छा कैसे हैं ?'' लोग ऐसा क्यों सोचते हैं कि लड़कियाँ गणित नहीं सीख सकतीं ? दरअसल, गणित सीखने के लिए लड़कों और लड़कियों के रवैये में यह फर्क इस बात से आता है कि समाज में लड़को और लड़कियों से अलग–अलग उम्मीदें की जाती हैं। जैसे लड़कों को तो गणित पढ़ने के लिए जोर–शोर से बढ़ावा दिया जाता है और लड़कियों को कहा जाता है कि गणित पढ़कर क्या करेगी। इस मान्यता से कि लड़कियां गणिती सीख ही नहीं सकती, उनके आत्मविश्वास को धक्का ही पहुँचा है। इसी वजह से काफी कम उम्र से ही लड़कियों में गणित के लिए अरूचि पैदा हो जाती है।

"लड़कों और लड़कियों में गणित सीखने की एक–सी क्षमता होती है।"

विकास लगातार जारी रहता है

अपने आसपास के किन्हीं दो बच्चों के बारे में सोचें। क्या आप यह कह सकते हैं कि वे एक से हैं ? क्या वे एक ही सी बातों को एक से ढंग से सीखते हैं? इस बात की संभावना काफी कम है क्योंकि बच्चे एक दूसरे से बहुत अलग होते हैं। दरअसल कोई भी दो बच्चे एक जैसे नहीं होते। उनके सीखने की रफ्तार अलग होती है। एक ही से हालात में उनकी अलग–अलग प्रतिक्रियाएं होती हैं। और जीवन में वे अलग–अलग अनुभवों से गुजरते हैं। इस विविधता में भी आपने एक पैटर्न देखा होगा, खासकर बच्चों के विकास और उनकी क्षमता में।

मोटे तौर पर, बच्चों के विकास को कुछ अवस्थाओं में बांटा जा सकता है। हर अवस्था पिछली अवस्था पर निर्भर करती है। प्याजे ने संज्ञानात्मक विकास (congnitive development) को चार अवस्थाओं में बांटा है : संवेदी क्रियात्मक (sensorimotor), पूर्व–संक्रियात्मक (pre-operational), मूर्त संक्रियात्मक (concrete operational), और औपचारिक संक्रियात्मक (formal operational)। इस भाग में हम विकास की दूसरी और तीसरी अवस्थाओं पर ही बात करेंगे।

"प्याजे ने बच्चों के विकास को चार अवस्थाओं में बांटा है जिनमें पहली है संवेदी–क्रियात्मक अवस्था। यह अवस्था जन्म से दो साल तक होती है।"

पूर्व–संक्रियात्मक अवस्था

बच्चे के संज्ञानात्मक विकास की यह अवस्था आम तौर पर 2 साल से शुरू होकर 6 साल चलती है। इस तरह यह ज्यादातर बच्चे के स्कूल जाने से पहले की अवस्था होती है। पूर्व–संक्रियात्मक अवस्था में आम तौर पर बच्चे अपने फैसले इस बात से करते हैं कि चीजें कैसी दिखाई देती हैं, न कि बड़ो की तार्किक सोच के मुताबिक।

जैसे– इस अवस्था के बच्चों को यह नहीं समझ आता कि कुछ क्रियाओं को परिवर्तित भी किया जा सकता है। इसलिए, वे सोचते हैं कि एक पतले लंबे गिलास से चौड़े छोटे गिलास में दूध डालने पर दूध की मात्रा कम हो जाती है। या एक लाइन में चीजों को फैला कर लाइन की लंबाई बढ़ा दी जाए तो उन्हें लगता है कि उसी लाइन में ज़्यादा चीजें रखी हुई हैं। क्या बच्चों द्वारा चीजों का संरक्षण न कर पाने की इस कमजोरी से आपने कभी फायदा नहीं उठाया? मैंने तो ऐसा किया है। जैसा कि जब मेरा चार साल का भतीजा जिद करता है कि वह गिलास भर के ठंडा शर्बत पिएगा, तो मैं शर्बत को एक गिलास में भरकर उसे दे देती हूँ। इस तरह उसे एक पूरा गिलास भर ठंडा शर्बत मिल जाता है और वह खुशी–खुशी उसे पी लेता है।

E14) अपने अनुभवों से दो और ऐसे उदाहरण दें, जिनमें बच्चे तर्क, के बजाय, जो उन्हें दिखता है, उसके आधार पर फैसले करते हैं।

ज्यादातर बच्चे इसी अवस्था में कुछ संख्याओं को थोड़ा–थोड़ा समझने लगते हैं, और रोज के अनुभवों में उनका इस्तेमाल करते हैं। उदाहरण के लिए, 2 साल की बच्ची 2 गेंदों और 3 गेंदों के समूहों में फर्क सिर्फ देखकर बताना सीखती है, ठीक वैसे ही जैसे वह मोटर गाड़ी और बस में फर्क बताना सीखती है। लेकिन वह सिर्फ देख कर ही 8 गाड़ियों और 9 गाड़ियों के समूह में फर्क नहीं कर पाती। इतने या इससे बड़े समूहों की तुलना करने के लिए उसे गिनती सीखनी पड़ेगी।

गिनती और चीजों का संरक्षण सीखने के मुकाबले बच्चे 'कम' या 'ज्यादा' की अवधारणा जल्दी लेते हैं। ऐसा इसलिए होता है क्योंकि **पूर्व स्कूली बच्चे पैटर्नों में सोचते हैं।** ये बच्चे जो खुद देखते हैं, उस पर ज्यादा भरोसा करते हैं। बच्चे तरह–तरह की आकृतियाँ पहचान तो सकते हैं पर उनकी हूबहू तस्वीर नहीं बना सकते। वे शब्दों के मुकाबले तस्वीरों को 'पढ़ना' जल्दी सीख जाते हैं। आपने देखा होगा कि छोटे बच्चे इन्सानों और जानवरों की तस्वीरें आसानी से पहचान लेते हैं लेकिन उतनी आसानी से वर्ग या त्रिभुज जैसी सरल आकृतियाँ नहीं बना पाते। इसी तरह एक छोटी बच्ची जो एक जगह से दूसरी जगह तक पहुँचने का रास्ता याद रख सकती है उसके लिए यह बताना या चित्र बना कर दिखाना बहुत मुश्किल होता है कि वह रास्ता क्या है। पैटर्न पहचानने की अपनी योग्यता के कारण ही बच्चे तमाम ऐसे शब्दों को 'पढ़' पाते हैं जिन्हें ये अक्सर देखते हैं हालांकि उन्हें अक्षरों की पहचान नहीं होती।

अगर आप पूर्वस्कूली बच्चों को कुछ चीजें गिनने के लिए दे ंतो आपकों यह जानकर हैरानी होगी कि वे छोटी संख्याओं को पहचान सकते हैं गिन सकते हैं यहाँ तक की उन्हे जोड़ और घटा भी सकते हैं, हालांकि संख्या का संरक्षण वे काफी बाद में कर पाते हैं । अगर चीजों की संख्या छोटी हो तो उन्हें देखकर ही ये बच्चे ये सब काम कर लेते हैं। इसके लिए यह जरूरी नहीं कि उन्हें गिनती की जानकारी हो। इसलिए 4 या 5 तक की गिनती को **दृष्टि–बोधात्मक संख्याएं (perceptual numbers)** कहते हैं।

चित्र 5 : अगर मा [illegible] देता है तो बहुत छोटे
बच्चे भी यह समझ लेते हैं कि चीजों का कौन सा समूह बड़ा है।

लेकिन आम तौर पर पूर्वस्कूली बच्चे कई आकारों की एक साथ तुलना नहीं कर पाते। वे एक बार में केवल दो ही चीजों की तुलना कर सकते हैं। वे 'कम' या 'ज्यादा' ही की धारणा समझ सकते हैं। लेकिन यह बात कि किसी चीज की मात्रा 'इससे कम है, पर उससे ज्यादा', या फिर 'ज्यादा, कम और उससे कम' वे नहीं समझ सकते। उनके लिए आकार सिर्फ बड़ा या छोटा होता है। इसलिए वे चीजों को उनके आकार हो सकता है, यह बात उनकी समझ से पर होती है। इसीलिए वे चीजों को उनके आकार या लंबाई के हिसाब से सिलसिलेवार नहीं रख पाते, या घटनाओं को क्रमबद्ध नहीं कर पाते। (इस बारे में और जानकारी इकाई 5 में दी गई है।)

पूर्वस्कूली बच्चे छोटी संख्याओं को जोड़ और घटा सकते हैं।

E15) मेरा एक तीन साल का दोस्त है। उसके पास खेलने के लिए बहुत सी छोटी गाड़ियाँ हैं। एक बार उसके साथ खेलते हुए, मैनें गाड़ियों को दो समूहों में बांट दिया। एक समूह में 14 गाड़िया थी जिन्हें फैला कर रखा गया था, और दूसरे में 15 थीं जिन्हें पास–पास रखा गया था। जब उसे यह कहा गया कि वह ज्यादा गाड़ियों वाला समूह 'चुने, तो उसने सही समूह चुना इस घटना के आधार पर आप किस निष्कर्ष पर पहुँचेंगे? अपने चयन की वजह बताएं।

(क) वह 20 तक गिन सकता है।

(ख) वह बड़े समूहों को देख कर उनमें फर्क बता सकता है।

(ग) यह चयन सिर्फ एक इत्तफाक था, और वह यह काम दोबारा नहीं कर सकेगा।

(घ) वह गाड़ियों के समूहों के साथ तो यह कर सका, लेकिन और चीजों के साथ यह नहीं कर पाएगा।

जैसे जैसे बच्चे बड़े होते हैं, वे संख्याओं को सहज रूप से समझने की अवस्था से आगे बढ़ते हैं। अभी तक तो वे सिर्फ देखकर चीजों की संख्या पहचानते थे लेकिन बड़े होने पर उनका सोच भी पहले से ज्यादा विकसित होता है। पूर्व–संक्रियात्मक बच्चों में जो बड़े बच्चे हैं उनमें संबंध बनाने की और संबंध देखने की क्षमताएं विकसित करनी चाहिए जिससे कि उनकी गणितीय समझ बढ़े। इसका एक अच्छा तरीका है कि उन्हें ऐसे खेलों में लगाया जाए जिनमें थोड़ी सी ही चीजें हों, पर उन्हें उन चीजों में कुछ और चीजें 'जोड़नी' पड़े या उनमें से कुछ चीजें 'निकालनी' पड़े।

आइए अब हम बड़े, ज्यादा विकसित बच्चों पर गौर करें।

मूर्त संक्रियात्मक अवस्था

प्याजे एक 5 साल के बच्चे के बारे में बताते हैं जो छोटे–छोटे पत्थरों के समूह से खेल रहा था। पहले उसने

पत्थरों को एक लाइन में रख कर उन्हें बायीं से दायीं ओर गिना। वे गिनती में 10 थे। फिर उसने उन्हें दायीं से बायीं ओर गिना। उसे बड़ी हैरानी हुई जब उसने पाया कि वे अभी भी गिनती में दस थे। फिर उसने उन्हें गोल घेरे में रखा, और पहले उन्हें वामावर्त गिना, फिर दक्षिणावर्त दिशा में। यह जानकर वह बड़ा ही खुश हुआ कि चाहे जैसे भी किया जाए, उनकी संख्या हमेशा दस ही रहती है। इस तरह उसने इस बात की खोज की कि रखने का ढंग बदल देने पर भी उनकी संख्या वही रहती है। आपने देखा कि धीरे–धीरे अपने आप ही अपनी पहले वाली धारणा को छोड़ रहा था जिसके मुताबिक चीजों की संख्या इस बात पर निर्भर करती है कि उन्हें कैसे रखा गया है।

अब वह संज्ञानात्मक स्तर पर करने के लिए तैयार था। उसने इस गणितीय अवधारणा को भी समझ लिया था कि अगर चीजों के एक समूह को छोटे–छोटे उपसमूहों में बांट दिया जाए तो भी उनकी संख्या या मात्रा संरक्षित रहती है। चीजों का संरक्षण बच्चा **मूर्त संक्रियात्मक अवस्था** में ही कर पाता है। बच्चों की यह अवस्था लगभग 6 से 10 साल के बीच में मानी गई है। संरक्षण की यह समझ ही इस अवस्था के बच्चे के सोच में एक अहम् बदलाव लाती है।

छह या सात साल की उम्र में बच्चे चीजों के दो समूहों को गिन कर उनकी तुलना कर सकते हैं। वे चीजों को जोड़ने और घटाने जैसे ज्यादा मुश्किल काम भी कर सकते हैं। यह संक्रियात्मक उनके सोच का स्वाभाविक हिस्सा बन रही होती है, लेकिन अभी भी वे अर्मूत स्तर पर नहीं सोच पाते। सात से दस साल के बच्चों की सोच मुख्य रूप से चीजों के साथ ही जुड़ी होती है वे सरंक्षण और गणित की अन्य मूल अवधारणाओं को सहज रूप से समझ सकते हैं। लेकिन समझ मूर्त संक्रियाओं पर ही आधारित होती है। इसलिए प्याजे इस अवस्था को 'मूर्त संक्रियात्मक अवस्था' कहते हैं।

इसलिए अगर इस अवस्था के बच्चों को जोड़ने का सवाल दिया जाए तो वे समूहों की चीजों को गिनकर जोड़ना पसन्द करते हैं, न कि उनकी संख्यांकों (number) को। वे ऐसा इसलिए करते हैं क्योंकि उन्हें प्रतीकात्मक संक्रियाओं के मुकाबले अपनी सहज समझ और ठोस अनुभवों पर ज्यादा भरोसा होता है।

जैसे– छह साल की कविता ने घटा का सवाल इस तरह से किया–

$$\begin{array}{r} 3\ 1 \\ -\ 1\ 6 \\ \hline 2\ 5 \\ \hline \end{array}$$

जब उससे पूछा गया कि यह उसने कैसे किया, तो उसने समझाया, ''6 में से 1 निकाला तो 5 बचे, और 3 में से 1 निकाला तो 2 बचे।'' यह पूछने पर कि क्या उसका जवाब सही था, उसने कहा कि उसे नहीं मालूम। लेकिन जब उसे कहा गया कि वह अपने तरीके से 31 में से 16 घटाये तो उसने सही जवाब (15) निकाला। उसने यह भी बताया कि उसने इस सवाल को अलग तरीके से हल किया। इसी तरह 8 साल का अमित भाग का सवाल (45÷3) नहीं कर सका, लेकिन 45 मिठाइयों को 3 लोगों में बराबर–बराबर आसानी से बांट सका।

परंपरागत तरीकों से सीखने में बच्चों को दिक्कत होती है क्योंकि इस अवस्था के बच्चों के लिए औपचारिक तरीकों में कुशलता पाना मुश्किल होता है, क्योंकि वे उनकी क्षमताओं के हिसाब से कहीं **ज्यादा अमूर्त होते हैं।** अगर सवालों को बच्चों के जीवन के अनुभवों से जोड़ा जाए तो वे उन्हें सहज रूप से समझ पाते हैं, और उन सवालों को अपने तरीकों से हल कर लेते हैं।

एक और वजह है कि प्राइमरी स्कूल की शुरूआत में औपचारिक अंकगणित करने में बच्चों को मुश्किल होती है। औपचारिक अंकगणित में सभी संक्रियाएं दायीं से बायीं ओर की जाती हैं, जबकि हिन्दी या अंग्रेजी बायीं

से दायीं ओर पढ़ी जाती है। इस वजह से प्राइमरी स्कूल के कई बच्चे अंकगणितीय संक्रियाओं को बाईं से दाईं ओर करने की गलती लगातार दुहराते हैं इस बात से यह नतीजा निकलता है कि बच्चों को अंकगणित सिखाने के साथ–साथ यह भी सिखाना जरूरी है कि किसी संख्या या चिन्ह वगैरह की सही जगह क्या है।

E16) जो कुछ भी आपने अभी तक पढ़ा है, उसके साथ–साथ अपने अनुभवों के आधार पर बताएं कि नीचे दी गई अवधारणाओं को सीखने और समझने के लिए आम तौर पर बच्चे किस उम्र तक तैयार होंगे?

(i) सरल वर्गीकरण

(ii) लंबाई का संरक्षण

(iii) गुणन में क्रमविनिमेयता, यानि कि $ab=ba$ किन्ही दो संख्याओं a और b के लिए।

(iv) समय

(v) संयोग और प्रायिकता

विकास की अंतिम अवस्था, प्राइमरी स्कूल के बाद, यानी 11 साल के बाद होती है। इस अवस्था में बच्चे **औपचारिक संक्रियाओं** को लागू करने लायक हो जाते हैं। अब वे चीजों या उनकी मात्रा को दिखाने के लिए प्रतीकों और शब्दों का इस्तेमाल कर सकते हैं। साथ ही उनमें परिकल्पनात्मक कथनों को समझने, उनको इस्तेमाल करने और उनमें तर्क संगत संबंधों को खोजने की योग्यता भी आ जाती है। इस अवस्था में किसी बच्चे की बीजगणितीय समीकरण, समानुपात चर, आदि अमूर्त अवधारणाओं को समझ पाने की क्षमता इस बात पर निर्भर करती है कि उसका औपचारिक संक्रियात्मक सोच कितना विकसित हो पाया है।

प्राइमरी स्कूल के बच्चों द्वारा गणितीय अवधारणाओं को सीखने में एक बड़ी दिक्कत यह है कि आम तौर पर उन्हें उन अवधारणाओं के अनुरूप मूर्त उदाहरण नहीं दिए जाते। प्राइमरी स्कूल के स्तर पर गणित सिखाने की जो पद्धति आजकल अपनायी जाती है, वह औपचारिक संक्रियात्मक अवस्था के बच्चों के लिए ज्यादा सही है। लेकिन इस स्तर पर गणित की अवधारणाओं को सीखने और गणित में कुशलता हासिल करने के लिए बच्चों को सीखने के ठोस और अर्थपूर्ण अनुभव होने जरूरी होते हैं।

E 17) बच्चों के बारे में नीचे दिए कथनों में से कौन से कथन सही है ? सही कथनों के लिए (✓) लिखें और गलत के लिए (×)। अपने चयन के कारण भी दें।

(क) प्राइमरी स्कूल के अधिकांश बच्चे मूर्त संक्रियात्मक अवस्था में होते हैं।

(ख) संख्या को समझने के लिए, बच्चों को वर्गीकरण और क्रम समझ में आना चाहिए।

(ग) पूर्व–संक्रियात्मक सोच प्राइमरी स्कूल के बच्चों का लक्षण है।

(घ) गणितीय समझ के विकास में, संरक्षण करने की क्षमता की एक मूलभूत भूमिका है।

इस भाग हमने बच्चों को उनकी उम्र के हिसाब से विकास की अलग–अलग स्पष्ट अवस्थाओं में बांट दिया है। क्या इसका यह मतलब है कि कोई भी 9 साल की बच्ची औपचारिक संक्रियात्मक अवस्था में नहीं हो सकती, या कि 6 साल की कोई बच्ची पूर्व–संक्रियात्मक अवस्था में नहीं हो सकती? अब इसके बारे में देखते हैं।

हर बच्चा दूसरों से अलग होता है

हालांकि सभी बच्चे मोटे तौर पर विकास की अवस्थाओं से एक ही क्रम में गुजरते हैं, लेकिन यह प्रक्रिया हर बच्चे के लिए अलग हो सकती है। यह फर्क बच्चों के व्यक्तिगत गुणों, जैसे कि उनकी बौद्धिक क्षमता, रवैये आदि में फर्क की वजह से होता है। साथ ही साथ यह फर्क उनके अलग–अलग सामाजिक, आर्थिक और सांस्कृतिक परिवेशों की वजह से भी होता है। जैसे कि यह एक आम बात है कि एक फेरी वाले का 6 या 7 साल का बच्चा जल्दी से तीन–चार चीजों के दाम जोड़ लेता है। या गांवों में लड़कियाँ जल्दी ही खाना बनाने

लगती है जिससे कि उनमें अनुपात, द्रव्यमान के संरक्षण और कई गणितीय अवधारणाओं की सहज समझ बनती है। यह बात उतनी ही उम्र के शहरी मध्यवर्गीय बच्चों या गांव के ही लड़कों पर लागू नहीं होती।

सामाजिक, सांस्कृतिक और आर्थिक पहलुओं के अलावा, मनोवैज्ञानिक पहलू से भी बच्चे एक दूसरे से अलग होते हैं। यह बात उन तरीकों में अक्सर झलकती है जो कोई बच्ची नई अवधारणाओं को समझने के लिए अपनाती है। उदाहरण के लिए, जोड़ सीखते वक्त शुरू में कुछ बच्चे 'सभी गिनने के' और कुछ बच्चे 'आगे गिनने के' तरीके अपनाते हैं। जैसे–जैसे बच्चे बड़े होते है वैसे–वैसे ही वे अधिक दक्ष तरीकों का इस्तेमाल करते हैं। तब कुछ बच्चे, पांच–पांच के समूह बनाकर, तो कुछ तीन–तीन या दस–दस के समूह बना कर चीजों को गिनते हैं।

E18) ''एक ही उम्र के बच्चे अलग–अलग संक्रियात्मक अवस्थाओं में हो सकते हैं और अलग–अलग उम्र के बच्चे विकास की एक ही अवस्था में हो सकते हैं।'' क्या आप इस कथन से सहमत हैं? अगर हां, तो उदहारणों से इसकथन की पुष्टि कीजिए। अगर नहीं, तो यह बताइए कि आप क्यों असहमत हैं।

ज्यादातर बाल मनोवैज्ञानिक अभ्यास E18 में दिए गए कथन को सही मानते हैं। इसलिए हमें अपने बच्चों को ध्यान से देखना, समझना चाहिए और उसी के मुताबिक उनकी क्षमताओं को आंकना चाहिए; यह कभी नहीं मान लेना चाहिए कि किसी बच्चे की उम्र अगर इतनी है तो वह उस उम्र के मुताबिक योग्य होगा ही। किसी भी वक्त पर आप बच्चों से जो भी करवाना चाहते हों या जो भी अभ्यास उन्हें देना चाहे हों, वे उस वक्त पर उनकी क्षमता के मुताबिक होने चाहिए। अगर आप एक पूर्व–संक्रियात्मक बच्ची से उम्मीद करेंगे कि वह दो बड़े समूहों की चीजों की संख्या की तुलना करे, तो ऐसी कोशिश करना बेकार होगा। उनमें से किस समूह में ज्यादा चीजें हैं, यह वह देखकर ही बिना गिनती किए, बता सकेगी। हो सकता है कि उसका जवाब सही हो, लेकिन आप किसी भी तरह से यह नहीं जान पायेंगे कि वह उस सही जवाब तक कैसे पहुँची।

ये अवस्थाएं एक सीढ़ी के पायदानों की तरह लगती हैं – हम एक पायदान पर कदम रख कर ही दूसरे पर चढ़ सकते हैं। ये पायदान एक दूसरे से साफ तौर पर अलग भी दिखते हैं। पर ऐसा है नहीं। **बच्चे का संज्ञानात्मक विकास लगातार जारी रहता है।** हर नई अवस्था पिछली अवस्था पर आधारित होती है। और **हर अवस्था में विकास के कई चरण होते हैं।** मिसाल के तौर पर, जब एक बच्ची गिनती का संरक्षण सीखने की कोशिश कर रही होती है, तो साथ ही साथ वह क्षेत्रफल या आयतन का संरक्षण भी सीख रही होती है। साथ ही वह चीजों और संख्याओं को क्रमबद्ध करना भी सीख रही होती है। जब वह दो समूहों की तुलना एकैकी संगति (one-one correspondence) से करने की कोशिश कर रही होती है, तो हो सकता है कि वह साथ–साथ गिनती भी सीख रही हो। इन अवस्थाओं की अहमियत सिर्फ इतनी है कि वे बच्चों को समझने में बड़ों की भी मदद करती हैं। साथ ही इनसे पाठ्यक्रम की विषय वस्तु और उसे पढ़ाने के ढंग को तय करने में भी मदद मिलती है।

जैसा कि हमने पहले कहा है, हर बच्चे के विकास की अपनी रफ्तार होती है। अलग–अलग परिवेश के कारण कुछ बच्चे दूसरे बच्चों के मुकाबले मूर्त संक्रियात्मक अवस्था में पहले पहुँच जाते हैं। एक शिक्षक होने के नाते आपको अपने सीखने वालों के विकास की अवस्था और उनके परिवेश के मुताबिक ही उन्हें सिखाना होगा। साथ ही सिखाने के साामान्य तरीके निर्धारित करते समय आपको बच्चों के विकास के आम पैटर्न की जानकारी भी रखनी होगी।

शिक्षक होने के नाते आपको उन बातों को भी ध्यान में रखने की जरूरत होगी जिनकी हम अब चर्चा करने जा रहे हैं।

अनदेखी कोशिशें

हालांकि बच्चों का विकास एक प्रक्रिया है, अक्सर हम सिर्फ अंतिम परिणाम को अहमियत देते हैं। जैसे कि हम बच्चों की जोड़ने, घटाने, गुणा करने या भाग देने की क्षमता की, यानी उनके **विकास की एक अवस्था तक पहुँचने की बात करते हैं।** वहाँ तक पहुँचने में बच्चे को जिस लंबी और कठिन प्रक्रिया से गुजरना पड़ा, उसे अक्सर ही अनदेखा कर देते हैं। मिसाल के तौर पर, क्या आपने कभी उन प्रक्रियाओं के बारे में सोचा है जिनसे कोई बच्ची गिनती सीखते हुए गुजरती है?

E19) इतिहास में उस समय की कल्पना करें जब संख्या पद्धति विकसित नहीं थी। तब एक किसान अपने पशुओं का हिसाब कैसे रखता होगा ? यह जानने के लिए कि सभी पशु सुरक्षित घर लौट आए हैं, वह क्या करता होगा? इससे जुड़ी उन सभी बातों की सूची बनाइए जो आपके दिमाग में आती हैं।

अगर आपने E19 किया है तो आपको समझ में आया होगा कि किसी एक कौशल (जैसे कि गिनने की क्षमता) को सीखने के लिए कई और कौशल भी सीखने होते हैं।

सारांश

इस इकाई में हमने पूर्व स्कूली और प्राइमरी स्कूल के बच्चों के सोचने और सीखने की कुछ प्रक्रियाओं को गणित सीखने के संदर्भ में प्रस्तुत किया है। हमने खास तौर से निम्न मुद्दों पर ज़ोर दिया है।

1. बच्चे गणित की शुरूआत की अवधारणाओं की समझ कैसे बनाते हैं–
   (i) बच्चों का चीज़ों और लोगों से संपर्क उनके सीखने का प्रमुख आधार होता है। यह संपर्क लगातार बना रहता है। इसलिए बच्चे लगातार सीखते रहते हैं, अगर हम उन्हें न रोकें, तो!
   (ii) ज्ञान हासिल करना और सूचनाओं को तोते की तरह दोहरा देना एक ही बात नहीं है।
2. बच्चे किन तरीकों से अवधारणाओं की अपनी समझ बनाते हैं।
3. बच्चों के व्यक्तिगत अन्तर।
4. बच्चे गणितीय अवधारणाओं को सीखने के लिए कब और कितने तैयार होते हैं।
5. गणितीय सोच के विकास में पूर्व स्कूली और प्राइमरी स्कूल के बच्चे किन अवस्थाओं से गुज़रते हैं।
6. अगर छोटे बच्चों को वास्तविक जीवन में ऐसे अनुभव दिए जाएं जिनमें गणितीय अवधारणाएं इस्तेमाल होती हैं, तो इससे उनके विकास में मदद मिलती है। लेकिन विकास को लेकर कोई भी जल्दबाज़ी और ज़ोर ज़बर्दस्ती नहीं की जानी चाहिए। ऐसी किसी भी कोशिश का जो बच्चों पर जल्दी से जल्दी सीखने का दबाव डालती हैं, उल्टा असर होता है। और इससे बच्चे अपना आत्मविश्वास खो सकते हैं।

हालांकि बच्चों का विकास एक प्रक्रिया है, अक्सर हम सिर्फ अंतिम परिणाम को अहमियत देते हैं। जैसे कि हम बच्चों की जोड़ने, घटाने, गुणा करने या भाग देने की क्षमता की।

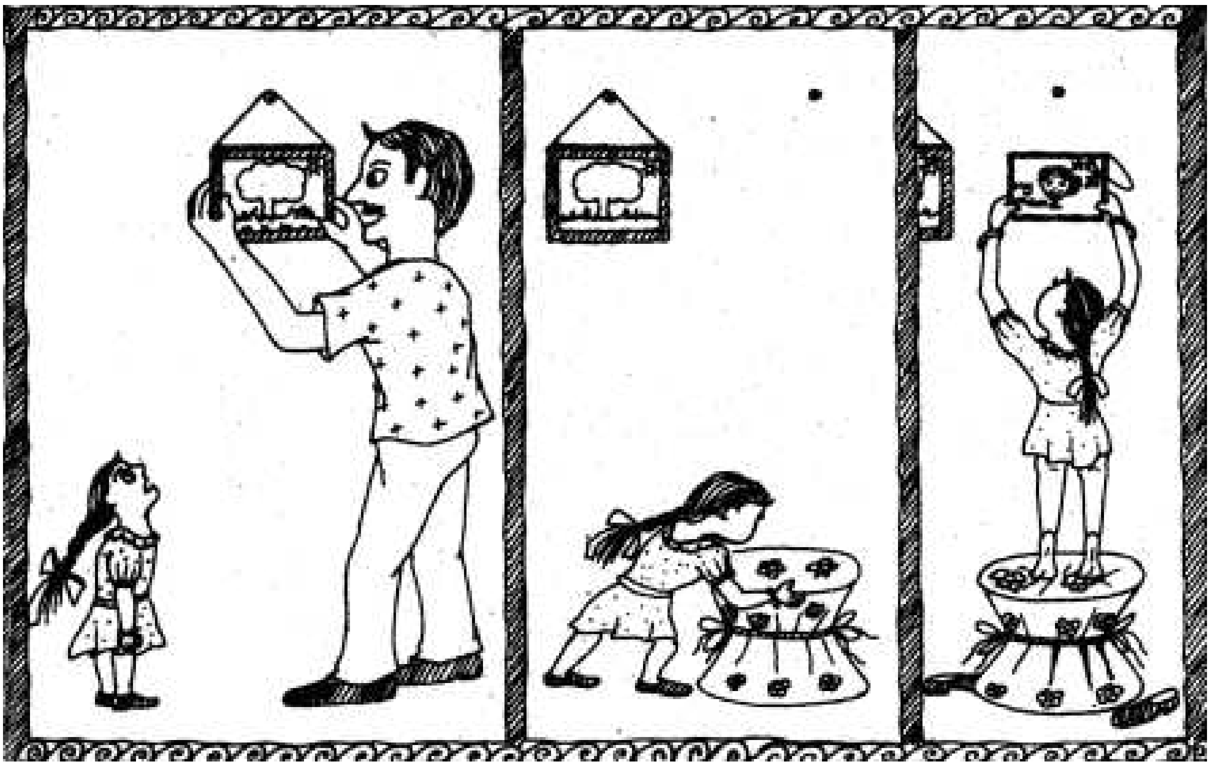
पाठ–3

सीखने वालों के बारे में विचार

सीखने वालों के बारे में विचार

पिछले पाठ में हमने सीखने के अलग–अलग नज़रियों, हम अपनी कक्षा में सीखने–सीखने की प्रक्रिया को कैसे आगे बढ़ाते हैं, इस बात पर चर्चा की। इस पूरी प्रक्रिया का सबसे महत्वपूर्ण हिस्सा है सीखनेवाले। सीखने–सीखाने की कोई भी प्रक्रिया इस बात पर निर्भर करेगी कि हम अपनी सीखनेवाले को किस रूप में देखते हैं। इस इकाई में हम सीखने वालों पर ध्यान केन्द्रित करेंगे।

हमने देखा कि बच्चे अपना गणितीय सोच, क्षमताएं कैसे विकसित करते है। इस पाठ में कई उदाहरणों की बातचीत करेंगे जिनमें बच्चे विभिन्न संदर्भो में मुख्य पात्र हैं। बच्चों की क्षमताएं असीम हैं और वे दुनिया की खोजबीन करने व इसके बारे में सीखने को उत्सुक हैं। बच्चे खुद दुनिया के बारे में अपनी समझ बनाते हैं वह सिर्फ बड़ों की नकल नहीं करते।



चित्र 1 : क्या यह बच्ची सिर्फ अपने पिता की नकल कर रही है?

कक्षा में हम जो कुछ करते हैं और जिसे सिखाने का अच्छा तरीका समझते हैं, वह इस बात पर निर्भर करता है कि बच्चों के सोचने के तरीकों के बारे में हमारी अपनी समझ क्या है। बच्चों के बारे में हमारी समझ का संबंध सीखने के हमारे मॉडल से होता है। इस इकाई में हम इस संबंध को ज्यादा स्पष्ट रूप से सामने लाने की कोशिश की गई है।

क्या बच्चे बड़ों की नकल करके सीखते हैं?

एक कार्यशाला (workshop) में मैंने कुछ शिक्षकों से इस संबंध में उनके विचार पूछे कि बच्चे कैसे सीखतें हैं और स्कूल आने से पहले वे गणित में क्या कुछ जानते हैं। शिक्षकों को टोलियों में बांटकर कहा गया कि वे आपस में इन सवालों पर चर्चा करें और चर्चा का सार प्रस्तुत करें। इन सभी टोलियों के चर्चा – सार

करीबन एक जैसे ही थे। इनमें यह कहा गया था कि बच्ची बड़ों को देख – देखकर और उनकी नकल करके सीखती है। आगे, और सवालों के जवाब में शिक्षकों ने जोड़ा कि बच्ची अपने हम उम्र साथियों से भी सीखती है किन्तु सीखती वही बातें हैं जो उसे बताई जाएं। उनका मत था कि बच्चे बड़ों को देखते – सुनते हैं इन अवलोकनों के आधार पर वे उसी तरह की क्रिया करने का प्रयास करते हैं। माँ–बाप और अन्य बड़े लोग 'सही' व्यवहार या 'सही उत्तर' की तारीफ करते हैं, अन्यथा उन्हें दण्डित करते हैं। दण्ड इस रूप में भी हो सकता है कि शिक्षक उन्हें वह बात अपनी नोटबुक में बार – बार लिखने को कहे। बच्ची का वह उत्तर बार – बार तब तक दोहराना होता है, जब तक कि वह सवाल का सही उत्तर न देने लगे।

चित्र 2 : क्या यह बच्ची किसी बड़े की नकल कर रही है?

भाषा सीखने के संदर्भ में भी उनका कहना था बड़े लोग शुरु में माँ, का, को जैसे सरल वर्णों को बोल – बोलकर बच्ची से उनकी नकल करवाते हैं और इन वर्णों का अभ्यास करवाते हैं। धीरे – धीरे वे बच्ची के सामने सरल शब्द बोलते हैं और उससे दोहराने को कहते हैं। जब वह इन शब्दों का इस्तेमाल काफी करने लगती है तब बड़े लोग उसे इसी प्रकार से सरल वाक्य बोलना सिखाते हैं।

शिक्षकों की ऐसी धारणाओं की वजह से कक्षाओं में निम्नलिखित किस्म का सिखाना आम देखने को मिलता है।

उदाहरण 1 : गांव के एक स्कूल में शिक्षक के पास कई सारे चॉक थे और वह बच्चों को गिनती का 'परिचय' देना चाहता था। किसी के साथ बातचीत के दौरान उसने यह समझ लिया था कि इस काम में ठोस वस्तुओं का बहुत महत्व है। लिहाज़ा उसने गिनती सीखने में बच्चों की मदद करने के लिए चॉक के टुकड़े इकट्ठे कर लिए थे। उसने एक चॉक उठाया और बोला 'एक'। कक्षा को हिदायत दी गई कि वह उसके पीछे दोहराए 'एक' । इसके बाद उसने वह चॉक नीचे रख दिया और दूसरा चॉक उठाकर बोला 'दो'। फिर से कक्षा ने दोहराया 'दो'। दूसरे चॉक को भी नीचे रखकर उसने एक और चॉक उठा लिया और बोला 'तीन'। कक्षा के सभी बचों ने उसके पीछे दोहराया 'तीन'। यह कवायद दो सप्ताह बाद भी जारी थी। फर्क सिर्फ इतना था कि अब शिक्षक की जगह कक्षा मॉनीटर के पीछे – पीछे सब बच्चे एक आवाज में बोल रहे थे।

ऊपर के उदाहरण में शिक्षक का यह मानना है कि बच्ची किसी बड़े या किसी अधिकार जताने वाले दूसरे बच्चे को देखकर या सुनकर सीखती है। क्या सह सच है?

E1) आपके विचार से उदाहरण 1 का शिक्षक बच्चों के शुरुआती ज्ञान के बारे में क्या सोचता है? बच्चे क्या जानते हैं और कैसे सीखते हैं, इस बारे में उसके आकलन से क्या आप सहमत हैं?

E2) उदाहरण 1 में बच्चों को जो कुछ दिखाया जा रहा है और उनसे जो कुछ दोहराने को कहा जा रहा है, उसमें क्या समस्या है?

E3) किसी 3 या 4 वर्षीय बच्ची को ध्यान से देखते रहिए मगर उसे पता न चले। वह जो – जो करे उनकी एक सूची बनाइए और नोट कीजिए कि वह कहां तक आगे बढ़ पाती है। मसलन, हो सकता है कि आप देखें कि वह 3 वस्तुओं तक गिन पाती है मगर 5 तक नहीं। क्या इस बच्ची ने बड़ों की नकल करके सीखा है? अपने उत्तर का कारण दीजिए।

आइए अब तीन उदाहरणों में देखते हैं कि कुछ परिस्थितियों में कैसा व्यवहार दिखाते हैं। इन उदाहरणों को पढ़ते हुए अपने आपसे पूछते जाइए कि क्या इन बच्चों ने सिर्फ अपने आसपास के बड़ों की नकल कर–करके सीखा है।

उदाहरण 2 क) : मेरे एक दोस्त ने मुझे बताया कि एक दिन वह अपनी दो साल की बेटी मधु के साथ जा रहा था। उन्हें एक दुकान में जाना था जिसके सामने एक छोटी नाली थी। बाप–बेटी दुकान की ठीक सामने एक पुलिया की तरह रखे एक दो फुट चौड़ी टाइल (tile) की तरफ चलने लगे। बच्ची उस टाइल से कुछ फुट पहले ही रुककर पिता को दाईं तरफ खींचते हुए कहने लगी, "उधर से जाएँगे। (एक अन्य पुलियानुमा पत्थर की ओर इशारा करके)। यहां पर मैं गिर जाऊँगी।" फिर उसने उस दूसरी पुलिया पर से नाली पार की और दुकान पहुंचने के लिए बाईं ओर मुड़ गई।

उदाहरण 2 ख) : तीन–वर्षीय मंसूर ने एक नया शब्द 'छोटा–बड़ा' बनाया है। वह अक्सर अपने माता–पिता से कहता है, "अब मैं छोटा–बड़ा हूं, और बहुत सारे काम कर सकता हूं। मैं गिलास से दूध पी सकता हूं पर कार नहीं चला सकता। जब मैं दादा (बड़ा भाई) जैसा बड़ा हो जाऊँगा, तब स्कूल जाऊगा, और जब मैं पापा जैसा बड़ा हो जाऊगा तब कार चलाऊगा।" वह कभी–कभी बगैर चेतावनी के अपनी पेन्ट भी गीली कर देता है। तब वह अपने ढंग से कहता है कि वह फिर से छोटा हो गया है, अब वह छोटा–बड़ा नहीं है।

उदाहरण 3 ग) : जब शेखर करीब दो साल का था तब वह अपने एक पारिवारिक दोस्त के घर जाया करता था, जिसके पास दो कुतिया थीं। इनमें से बड़ी कुतिया काली थी और उसका नाम माया था। छोटी वाली सफेद थी, ज्यादा उत्पाती थी और उसे तोफू कहते थे। शेखर माया को पसन्द करता था और उसे छूने को उत्सुक करता था। वह दोनों कुतिया को माया पुकारने लगा। एक दिन शाम को घूमते हुए उसने सड़क पर एक भूरा कुत्ता देखा और उसकी ओर इशारा करके 'माया, माया' चिल्लाने लगा। कुछ दिन बाद उसने एक किताब में एक बकरी का चित्र देखा, बकरी की ओर इशारा करके बोला, 'माया'। अब वह 'माया' शब्द का इस्तेमाल न सिर्फ कुत्तों के लिए बल्कि जो भी जानवर देखता उसके लिए करता। उसके लिए हाथी और ऊंट भी माया थे, लेकिन हैरानी की बात थी कि गायें माया नहीं थी। वे एक अलग वर्ग में थीं।

शेखर अब तीन साल का है और बकरी को दो नामों से पुकारता है – माया और बकरी। कुत्ते तो माया ही हैं। मगर गायों के भी अब दो नाम हो गए हैं– गाय और माया।

इन तीनों स्थितियों का ध्यान से विश्लेषण करने पर, आपके हिसाब से बच्चों ने जैसा व्यवहार दर्शाया, उसके लिए उनमें कौन सी क्षमताएं रही होंगी ? उदाहरण 2 क में बच्ची ने देखकर चौड़ाई का अनुमान लगाया, उसका संबंध सुरक्षा से जोड़ा बाद में बाईं ओर मुड़ी, जिससे पता चलता है कि उसे दिशा का भी एहसास है।

उदाहरण 2 (ख) में बच्चे ने अपनी स्थिति का वर्णन देने के लिए एक ऐसा वर्ग बनाया जिससे वह अपनी व अपने भाई की अवस्था के बीच अंतर भी बता सकता है। वह यह वर्णन करने की भी कोशिश कर रहा है कि बड़े लोग क्या कर सकते हैं। यह भी पहचानता है कि कुछ काम सिर्फ बच्चे करें तो मंजूर होते हैं, बड़ों से नहीं।

उदाहरण 2 (ग) के बच्चे की क्षमताओं पर विचार करते हुए निम्नलिखित अभ्यास कीजिए।

E4) शेखर किन दिमागी प्रक्रियाओं से गुजर रहा है? आपके हिसाब से उसने कौन से कार्य नकल के आधार पर किए हैं और कौन से नहीं?

स्वतंत्र व्यक्तियों के रूप में बच्चे जो सारी चीजें कर पाते हैं और जो बहुत सारी चीजें नहीं कर पाते हैं, उन्हें देखकर क्या आप स्वीकार करेंगे कि वे ज्यादातर बड़ों की नकल करके सीखते हैं ? यदि यह सही होता तो ऐसा क्यों होता है कि एक दो–वर्षीय बच्ची 6 चीजें नहीं गिन सकती है जबकि कोई बड़ा व्यक्ति उसके सामने कई बार 6 चीजें गिनकर दिखाता है? क्या हमें बच्चों के सीखने को लेकर किसी अन्य समझ की तलाश करनी चाहिए?

कुछ लोगों का यह भी मानना है कि बच्चे ज्य़ादातर बड़ों को देखकर और गलतियों को सुधारते हुए सीखते हैं। मसलन, बच्ची कोई ध्वनि सुनती है, वही ध्वनि निकालने की कोशिश करती है, सफल नहीं होती, सुधारती है, फिर से कोशिश करती है। इस तरह से वह उस ध्वनि को सीख जाती है। इन लोगों का यह भी मानना है कि, मसलन, यदि बच्ची सुनती है कि उसके आसपास के अन्य किसी चीज को बड़ी कहते हैं, तो वह भी उसे बड़ी कहने लगती है। इस तरह से वह बड़ी चीजों और छोटी चीज़ों के वर्ग बना लेती है।

निम्नलिखित उदाहरण के आधार पर देखते हैं कि यह धारणा किस हद तक हमें माननी चाहिए।

उदहारण 3 : जब शीला की बेटी कामना चार साल की थी, तब उसने देखा था कि एक डॉक्टर बैग लेकर शीला की मां की जांच करने आया था। कामना ने एक प्राइवेट क्लिनिक के ऑपरेशन कक्ष के साथ लगा तैयार वाला कमरा भी देखा हुआ था। उसने वहां ऑपरेशन में इस्तेमाल होने वाले सामान को एक साथ रखे हुए देखा था। इसके कुछ दिनों बाद घर से छोटी–छोटी चीजें गायब होने लगीं। दो कैंचियां नदारद थीं, एक–दो सुइयां नहीं मिल रहीं थीं, धागे की एक रील गुम हो गई थी, आईने का एक छोटा टुकड़ा और यहां तक कि कुछ छोटी–छोटी शीशियां भी गायब हो गई। ये सारी चीजें एक लम्बे समय के दौरान इतनी धीरे – धीरे गायब हुई कि हर किसी ने सोचा कि यहीं–कहीं पड़ी होंगी। एक महीने बाद शीला अपनी दोपहर की झपकी ले रही थी कि हड़बड़ाकर उठ गई। उसने देखा कि उसकी बेटी एक छोटे पुराने सूटकेस के साथ बिस्तर पर चढ़ने की कोशिश कर रही है। कामना कह रही थी, "सो जाओ, सो जाओ, मैं तुम्हारा ऑपरेशन करूगी।

शीला : कैसा ऑपरेशन ?

कामना : मैं इस कैंची से तुम्हारा शरीर काटूंगी, काटकर ठीक करूँगी और फिर सिल दूंगी।

शीला : काटोगी कैसे ?

कामना : इस कैंची से।

शीला : (उसके हाथ से धीरे से कैंची लेते हुए) दिखाओं। यह तो छोटी है, इससे काम नहीं चलेगा।

कामना : (दूसरी कैंची निकालते हुए) मेरे पास यह बड़ी वाली भी है और यह चाकू भी है।

शीला : और क्या – क्या है तुम्हारे पास ?

कामना ने एक नली निकाली और उसे अपने कान पर लगा लिया। उसने मां को वह सुई भी दिखाई जिससे बाद में उसे सिला जाना था। जो सारी चीजें गुम हुई थी, वें एक–एक करके कामना के बैग में से निकल रही थीं।

उदाहरण 4 : पांच साल की नीलू अपनी चप्पलें घिसटती हई ऊंची नाक किए अपनी मां के कमरे में यह पुकारती हुई घुसी, "रेणु, ओ रेणु ! तुम कहां हो बहू ?" जब उसकी मां रेणु ने उसकी ओर तिरछी निगाहों से देखा, तो नीलू ने कहा, "श......श....... मैं बड़ी ताई हूं।" रेणु ने फौरन सिर पर पल्लू डालकर कहा, "आइए, आइए।"

नीलू : तुम्हारा लड़का कहां है ? सो रहा है ?

रेणु : वह अब सोया है। दोनों बच्चे मुझे बहुत परेशान करते हैं।

नीलू : मेरे बच्चे तो मुझे परेशान नहीं करते। तुम भी अपने बच्चों को जो वे चाहें दे दिया करो। फिर वे तुम्हें बिल्कुल परेशान नहीं करेंगे।

इस घटना में क्या चल रहा है ? क्या नीलू ताईजी की नकल कर रही है ? क्या उसकी ताई यह कहेगी, "तुम भी अपने बच्चों को जो वे चाहें दिया करो" ? नीलू ताईजी बनकर क्या कर रही है ? क्या वह ताईजी के बारे में सीख रही है, या वह यह प्रदर्शित कर रही है कि उसने ताईजी के बारे में और अपनी मां के सामने उनकी हैसियत और संबधं को लेकर क्या सीखा है?

जब कुछ शिक्षकों को ऊपर के उदाहरण बताए गए तो उन्होंने कहा कि जाहिर है कि ये बच्चे बड़ों को देखकर उनकी नकल करने तथा उनकी क्रियाओं को दोहराने की कोशिश कर रहे हैं। अन्य शिक्षक इससे असहमत थे। उनका कहना था कि यह तो सही है कि कामना व नीलू उनके आसपास जो कुछ होता है उसका अवलोकन करती हैं। परन्तु वे यह समझने की कोशिश कर रही हैं कि हो क्या रहा है, और अपने हिसाब से उसकी व्याख्या कर रही हैं। उदाहरण के लिए, कामना ने जो कुछ देखा–सुना, उसके आधार पर उसने डॉक्टर के कामकाज व व्यवहार की अपनी समझ बनाई।

अब हम एक बड़े बच्चे का उदाहरण देखते हैं, जिसके बारे में कहा जा सकता है कि वह बड़ों की नकल करके सीख रही है। लेकिन, यदि आप स्थिति का विश्लेषण करेंगे, तो देखेंगे कि बच्ची ने कितनी समझ विकसित की है।

उदाहरण 5 : सरोज की 7 वर्षीय बेटी ने अपने खिलौनों के ढेर में से एक पुराना केल्कुलेटर निकाला और उससे इसकी मरम्मत करने को कहा। सरोज ने एक पेंचकस से एक–दो पेंच कसे और केल्कुलेटर काम करने लगा। उसकी बेटी इस प्रक्रिया को बहुत ध्यान से देख रही थी। दो दिन बाद वह फिर से केज्कुलेटर लेकर आई सरोज से उसे ठीक करने को कहा। इस बार पेंचों को घुमाने से कुछ फायदा नहीं हुआ और सरोज ने हाथ डाल दिए। दो दिन बाद बेटी फिर से आकर उत्तेजित होकर बताने लगी, "देखों, मैंने केल्कुलेटर ठीक कर लिया है।" सरोज ने कहा, "हो ही नहीं सकता, वह तो पूरा टूट चुका है।" इस पर बेटी केल्कुलेटर ले आई और दिखाकर कहने लगी, "देखो!" पता यह चला कि बच्ची ने भी केल्कुलेटर ठीक करने के लिए पेंचकस का ही इस्तेमाल किया था।

बच्चों की क्रियाओं के इन सब उदाहरणों से यह पता चलता है कि हम अक्सर बच्चों के प्रति सहानुभूतिपूर्ण नहीं होते है। सीखने संबंधी स्थितियों के बारे में हम कह देते हैं कि बच्ची तो सिर्फ जानकारी के एक भण्डार घर का काम करती है, वह बड़ों की नकल करती है और वह वही बातें सीखती है तो बड़े उसे बार–बार बताते हैं। हम अक्सर बड़ों को यह कहते सुनते हैं "मैंने इससे (बच्ची से) कहा कि यह ऐसे करो और करके दिखा दिया कि कैसे करना है। इसने मेरे किए की नकल उतारी और इसी तरह सीख गई।" या "मैंने इस बच्ची को नियम बताकर कुछ सवाल करने को दिए। उसने कर तो लिए, परन्तु कुछ गलतियां की। मैंने उसे उसकी गलतियां बताई, फिर से नियम समझा दिया और कुछ और सवाल दे दिए। इस बार भी उसका काम ठीक नहीं रहा, मगर पहले से बेहतर था। उसने बार–बार कोशिश की और धीरे–धीरे वह सवाल हल करने लगी।"

क्या आपको अब भी लगता है कि ये बयान सही या सार्थक हैं? अगले अभ्यास करते हुए इसके बारे में सोचिए।

E5) क्या आप कहेंगे कि उदाहरण 5 में बच्ची ने सिर्फ अपनी मां की नकल की? क्यों?

E6) "बच्चे जो भी सीखते हैं वह दूसरे लोगों की नकल करके सीखते हैं।" यह कथन सीखने या बच्चों के व्यवहार को समझने के लिए काफी क्यों नहीं है?

E7) इस भाग में हमने जो कुछ कहा, उसका बच्चों को गणित सिखाने के संबंध में क्यामहत्व है?

इस भाग में हमने देखा कि बच्चे आंख मूंदकर दूसरे लोगों की नकल करके बिल्कुल नहीं सीखते हैं। वे अपने

आसपास की चीजों की खोजबीन करने और उनके साथ प्रयोग करने को उत्सुक रहते हैं और इन चीजों को अनुभवों से जोड़ते हैं। यदि वे वही करते भी हैं जो बड़े करते हैं, तो भी यह नकल रूप में नहीं, बल्कि इस रूप में होता है कि वे वह सब करके देखना चाहते हैं जो बड़े लोग करते हैं तथा इससे भी ज़्यादा कुछ करना चाहते हैं।

क्या बच्चे खाली स्लेट हैं?

एक शिक्षक हमारे साथ इस बात पर चर्चा कर रहे थे कि बच्चे सिर्फ इसलिए सीखते हैं क्योंकि बड़े लोग उन्हें कुछ बताते हैं। उनका दृढ़ विचार था कि यह बात सही है। उनको यक़ीन था कि यदि धीमे – धीमे किया जाए, तो हम बच्चों को जो भी सिखाना चाहें, टुकड़ों में सिखा सकते हैं। मैंने पाया कि कई बड़े यह राय रखते हैं। वे साफ तौर पर यह मानते हैं कि बच्चे तब तक कुछ नहीं जानते हैं। नीचे उदाहरणों से स्पष्ट करने की कोशिश की गई है।

अलबत्ता ऐसे भी लोग हैं जो मानते हैं कि बच्चे अपने अवलोकनों से और अपने निहायत क्रियाशील दिमागों का उपयोग करके ही काफी कुछ जानते हैं।

नीचे उदाहरणों से स्पष्ट करने की कोशिश की गई है।

उदाहरण 6 : आठ माह की रेहाना अपनी मां की गोद में बैठी हाथ बढ़ा – बढ़ाकर पास की मेज़ पर रखी चीजें उठाने की कोशिश कर रही थी। वह मुस्करा रही थी और अपने आसपास बैठे मेहमानों की ओर बढ़ने की कोशिश कर रही थी। उसकी खास दिलचस्पी पड़ोस में रहने वाले एक दो वर्षीय लड़के में थी। जब तक वह वहां रहा, रेहाना उसकी ओर बढ़ने का प्रयास करती रही, अपना हाथ बढ़ाती रही और उससे बात करनें की कोशिश में लगी रही। जाहिर है, आसपास बैठे बड़ों को तो लगा कि वह बेमतलब आवाजें निकाल रही है। फिर पड़ोसी चले गए।

अब मां ने मेहमानों को यह दिखाने का फैसला किया कि रेहाना कितना कुछ कर सकती है। उसने रेहाना से पूछा, "हाथी क्या करता है ?" रेहाना पूरी तरह अपने काम में डूबी हुई थी और उसने कोई जवाब नहीं दिया। मां ने अपना हाथ बच्ची की नाक के सामने रखकर अपना सवाल दोहराया। इस बार रेहाना ने अपना हाथ नाक के सामने रखकर दूसरी बांह को जोरदार ढंग से लहराया। फिर मां ने पूछा कि हाथी नहाता कैसे है। अपने बाजू को नाक के पास रखते हुए रेहाना ने अपना हाथ सिर की ओर किया। फिर मां ने पूछा कि हाथी खाता क्या है रेहाना ने एक काल्पनिक केला लेकर उसे छीला।

अगला सवाल था, "बिल्ली कैसे बोलती है?" और फिर, "आंटी को मां बोलकर बताओं।" रेहाना ने लगभग बिल्ली की म्याऊँ जैसे आवाज निकाली और मां बोलकर बताया। फिर मां ने पूछा कि शेर दहाड़ता कैसे है, तो रेहाना मे 'वा' कहकर जवाब दिया। चूंकि बच्ची को पता नहीं था कि शेर कैसी आवाज निकालता है इसलिए उसने अपने मन से बनाकर एक आवाज निकाल दी। उसकी दादी की टिप्पणी थी, "यह उसे पता नहीं है।"

ऊपर के उदाहरण में मां जो चाहती थी, बच्ची से वही करवा रही थी, और कई बार उसे ऐसा करने के लिए फुसलाया भी। मां का विचार था कि बच्ची ने इतना सीख लिया है कि वह हाथी की सूंड की नकल बना सकती है और यह दर्शा सकती है कि तालाब में नहाने के लिए वह सूंड का इस्तेमाल कैसे करता है। क्योंकि मां ने उसे इसे करने का भी उम्दा प्रशिक्षण दे दिया था।

लेकिन क्या बच्ची सिर्फ उतना ही कर रही थी, जितना करने को उसकी मां कह रही थी? क्या वह अपनी क्रिया में किसी समझ का उपयोग नहीं कर रही थी? उसने शेर की नकल बनाने के लिए अपने दिमाग का इस्तेमाल कैसे किया? जब तक लड़का उस कमरे में रहा, बच्ची उससे बतियाने और उसकी ओर जाने का

प्रयास करती रही। जब वह चला गया, तो बच्ची को शेष लोगों में कोई दिलचस्पी नहीं थी। वह जानती थी मां उसे कुछ करने को कह रही है, समझ रही थी कि क्या करने को कहा जा रहा है मगर उसने किया नहीं। इस अरूचि का कारण शायद यह हो कि क्रियाओं और ध्वनियों की नकल करने का जो काम उसके सामने रखा गया, वह उसे बहुत बेमतलब जान पड़ा हो।

हम बच्चों को खाली स्लेट मानते हैं क्योंकि हम सिर्फ यह पता लगाना चाहते हैं कि जो हम चाहते हैं वे सीखें, उसे वे जानते हैं या नहीं। हम उनकी परीक्षा सिर्फ उन बातों में लेना चाहते हैं जो किताबों में हैं। हम उनकी ढेर सारी क्षमताओं, जिसमें हमें समझ पाने की उनकी क्षमता भी शामिल है, पर बिल्कुल ध्यान नहीं देते। यह बहुत की दिलचस्प बात है कि हम बड़े लोग बच्चों को सिर्फ वही सीखने तक सीमित रखना चाहते हैं जो उन्हें बताएं। देखिए उदाहरण 7.

उदाहरण 7 : शिक्षक ने कक्षा 3 के बच्चों को दो – दो अंकों की संख्या में एक से दूसरी को घटाने की 'सही विधि' बता दी थी। इसके बाद उसने बच्चों को उसी तरह के कई सवाल घर पर करने को दे दिए।

आफ़ताब ने कुछ सवाल किए जिनमें 'उधार' की जरूरत नहीं पड़ती थी। जब 56 – 28 आया तो वह अटक गया। उसने आकार मां से पूछा, "मैं क्या करूं? मैं 6 में से 8 को घटा नहीं सकता।" मां ने कहा, "मगर तुम तो 56 में से 28 को घटा रहे हो।" आफताब इसके बारे में सोचता रहा, सोचता रहा। आखिरकार उसने कहा, "मैं 16 से 8 घटा सकता हूं।" अपनी मां की मदद से उसने इस चरण को करने का तरीका ढूंढ लिया।

'अपने तरीके' से यह समस्या हल करने के बाद उसने अपना होमवर्क पूरा किया और अगले दिन शिक्षक को दे दिया। उसे इस बात की बिल्कुल उम्मीद नहीं थी कि शिक्षक उसके पूरे काम पर लाल स्याही से गलत का निशान लगा देगी। हताश होकर उसने शिक्षक से पूछा। शिक्षक ने उसे समझाया कि उसकी विधि (चित्र 3 क) गलत है और उसे सवाल शिक्षक द्वारा बताई गई विधि (चित्र 3 ख) से करना चाहिए।

$$\begin{array}{r} 56 \\ -\,28 \\ \hline 28 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 56 \\ -\,28 \\ \hline 28 \end{array}$$

(क) (ख)

जब आफताब ने शिक्षक को बताया कि उसका जवाब तो सही है, तो शिक्षक ने कहा कि हां लेकिन यह तो संयोग भी हो सकता है।

आफ़ताब जब घर आया तो परेशान था और उसने मां को पूरी बात बताई। मां ने उसके साथ बैठकर उसे शांत किया और समझाया कि कैसे दोनों विधियां काम करती हैं। जब मां ने उससे कहा कि वह अगले दिन जाकर यह बात शिक्षक को समझाए, तो वह चिल्लाने लगा, "मैं उन्हें नहीं बताऊंगा। तुम चाहती हो पूरी कक्षा मुझ पर हंसे? मै आज से अपनी कॉपी में और परीक्षा में उन्हीं के तरीके से करूंगा।"

चित्र 4 : क्या यह अखबार बेचने वाला बच्चा एक 'खाली स्लेट' है?

इस उदाहरण में शिक्षक की भूमिका एक मायने में बहुत उपयोगी रही। उसने बच्चों को करने के लिए काम

दिया, बच्चों द्वारा किए गए सवालों को देखा और इस बात पर ध्यान दिया कि बच्चे सही विधि सीख जाएं। इस स्थिति में शिक्षक के व्यवहार में कुछ गम्भीर दिक्कतें हैं। क्या आप उनका पता लगा सकते हैं?

क्या आप कहेंगे कि शिक्षक गणित सीखने में बच्चे की मदद कर रही है ? या, क्या वह यह सुनिश्चित कर रही है कि बच्चे का गणितीय सोच विकसित न हो ? क्या वह बच्चे की सृजनात्मकता को रोक रही है ? क्या वह उसका आत्मविश्वास कम कर रही है ? क्या वह यह सुनिश्चित करने का प्रयास कर रही है कि बच्चे का दिमाग़ खाली स्लेट है जिसमें वह जो चाहे लिख सकती है, खुद बच्चा नहीं लिखता ?

E7) क्या आप मानते हैं कि बच्चों के दिमाग हमारे द्वारा बताई गई बातों के अनुरूप ही विकसित होते है ? अपने मत के समर्थन में तर्क दीजिए।

E8) बच्चों के साथ अपनी अन्तर्क्रिया का एक ऐसा उदाहरण दीजिए जिससे पता चले कि वे खाली स्लेट नहीं होते।

इससे पता चलता है कि कुछ बच्चों को गणित सरल लगता है, कुछ को नहीं ? क्या इसका कारण सीखने के प्रति उनका उत्साह हो सकता है? अब इस पहलू पर देखते हैं।

क्या बच्चे सीखने को उत्सुक हैं?

छोटू के पिता कह रहे थे "छोटू मेरी जान का दुश्मन है। वह न मेरी सुनता है, न अपने शिक्षकों की। वह किसी बात को गम्भीरता से नहीं लेता। वह तो बस गिल्ली – डण्डा खेलना चाहता है।" जो बहुत ही नाराज थे। छोटू के पिता की तरह कितने सारे मां – बाप और शिक्षक मानते हैं कि बच्चे पढ़ाई में रूचि नहीं रखते। कितने सारे शिक्षक शिकायत करते हैं कि बच्चों को जबर्दस्ती कक्षा में बैठाना पड़ता है और ध्यान देने पर मजबूर करना पड़ता है। शिक्षक बताते हैं कि इसी रवैये की वजह से उन्हें एक ही बात बार – बार दोहरानी पड़ती है।

मगर, क्या यह बच्चों की गलती है ? हममें से कितने लोग वह काम करेंगे जिसमें हमारी रूचि न हो ? बच्चे हों या बड़े, हम सब किसी काम में तभी जुटते हैं जब वह हमें रूचिकर लगे। तो, किसी शिक्षक के लिए सबसे अहम् सवाल यह होगा कि "बच्चों को सीखने के लिए उत्साहित कैसे करें ?" इस भाग में हम इस सवाल का जवाब देने की कोशिश करेंगे।

क्या आपने कभी बच्चों को आपस में खेलते या किसी बच्ची को घर पर अकेले देखा है ? यदि आप किसी छोटी बच्ची को विभिन्न चीजों के साथ देखें, तो आपको कुछ अन्दाजा मिलेगा कि उसे क्या रोचक लगता है। बच्ची एक चीज़ मसलन, खिलौना गाड़ी उठा लेगी, उसे हर तरफ से टटोलेगी, उसमें से बाहर निकल रहे हिस्सों को घुमाने की, खींचने की कोशिश करेगी। यदि उसमें कोई पुर्जा ऐसा है जो चमकीला है या बाकी से अलग है तो उसकी विशेष जांच–पड़ताल होगी। वह उस खिलौंने का इस्तेमाल एक कार की तरह या किसी अन्य चीज की तरह करके देखेगी और फिर शायद उसे उठाकर दो–तीन बार जमीन पर पटकेगी। इसके बाद हो सकता है कि वह देखना चाहे कि उसे थोड़ा ऊपर से गिराने पर क्या होता है। बीच– बीच में वह उसे एक झुनझुने की तरह हिलाने या चूसने की कोशिश भी कर सकती है। वह यह भी तय कर सकती है कि अब इस छोड़ दे या फिर दूर फेंककर उसके पीछे भागे। मौका मिले तो वह इस चीज को सीढ़ियों से नीचे लुढ़काना भी चाहेगी। यदि हम उससे वह चीज लेना चाहें, उसे समझा दें कि वह टूट जाएगी, तो बच्ची का कहना होगा कि वह नहीं टूटेगी। यदि आप उससे कहें कि वह खिलौने के साथ सही ढंग से नही खेल रही है, तो शायद वह आपकी बात को अनसुना करके आपने काम में लगी रहे।

चित्र 5 :

यदि हम बच्ची के बर्ताव की सावधानीपूर्वक जांच करें, तो कुछ बातें साफ हो जाती हैं। बच्ची के लिए किसी खिलौने से खेलने का मतलब सिर्फ इतना नहीं होता कि उसका इस्तेमाल उस ढंग से कर लिया जाए जैसे इस्तेमाल की उम्मीद कोई बड़ा करता है। किसी चीज से खेलते वक्त बच्ची उसमें पूरी तरह खो जाती है (चित्र 5), और आसानी से उसका ध्यान इधर – उधर नहीं किया जा सकता। किसी खिलौने के साथ ऐसा खेल कभी–कभी काफी लम्बे समय तक चल सकता है।

यदि आप किसी 2 – 3 वर्षीय को एक से अधिक खिलौनों से खेलते देखेंगे, तो आपको हैरानी होगी कि वह इस दौरान उस खिलौने के साथ कितना कुछ कर लेती है। मसलन, यदि कुछ गाड़ियों के साथ खेले, तो हो सकता है कि वह उनके लिए एक पार्किंग स्थल बनाएगी और फिर उन कारों को पार्किंग स्थल से विभिन्न दुकानों तक अलग – अलग रास्तों से होकर ले जाएगी। वह किसी कार को पीछे खींचकर छोड़ देगी और देखेगी कि क्या होता है, या वह एक तकिए का इस्तेमाल एक ढलान के रूप में करके कारों को उस पर से लुढ़काएगी, या दो या दो से अधिक कारों की आपस में टक्कर करवाएगी। वह शायद एक कार को दूसरी पर रखकर चलाने की कोशिश करेगी या कार को किसी अन्य चींज से धक्का देकर देखेगी। कोई साथी हो या न हो, वह अपने खेल से काफी संतुष्ट रहेगी और पूरे ध्यान से उसे खेलेगी।

यदि कोई बड़ा इस स्थिति में प्रवेश करके बच्ची की शर्तो पर खेलने को राजी हो, तो बच्ची के पास असंख्य विचार होंगे जिन्हें वह बड़े के साथ आज़माकर देखना चाहेगी। मसलन, शायद बच्ची सुझाव दे कि कारों की दौड़ की जाए और यह देखा जाए कि किस रंग की कार सबसे तेज दोड़ती है। या शायद वह यह खेले कि ये कारें एक टैक्सी स्टैण्ड पर खड़ी हैं, और फिर टैक्सी स्टैण्ड का दृश्य बनाने में लग जाए।

दरअसल, ऐसे खेल बच्चों के बीच बहुत आम व लोकप्रिय होते हैं जिनमें वे विभिन्न स्थितियों की रचना करते हैं। दो – तीन बच्चे साथ हों, तो वे 'घर–घर' खेलने लगते है। वे अपने माँ – बाप, अपने शिक्षकों या अपने बड़े रिश्तेदारों के तौर–तरीकों की नकल करते हैं। वास्तव में बड़ों के क्रिया–कलापों की उनकी प्रस्तुति प्रायः उनके द्वारा देखे गए बड़ों के व्यवहार से आगे जाती है। यदि आप बच्चों को 'घर–घर' या 'स्कूल – स्कूल' खेलते देखेंगे, तो पाएंगे कि इन खेलों में बड़ों की क्रियाओं को वे आलोचनात्मक दृष्टि से देखते साथ ही, जो कुछ भी वे देखते हैं, खेलों में उनका विस्तार भी नज़र आता है। इनमें यह भी शामिल होता है कि बच्चों के ख्याल से बड़े एक अलग या नई परिस्थिति में कैसे बर्ताव करेंगे। आपको इन खेलों में बड़ों के वास्तविक व्यवहार की बजाय इस बात की भी झलक मिलेगी कि बच्चे उनसे कैसे व्यवहार की उम्मीद करते हैं।

E9) बग़ैर दखलंदाजी किए, घर पर खेलते कुछ बच्चों का ध्यान से अवलोकन कीजिए। क्या आपके अवलोकन इस भाग में कही गई बातों से मेल खाते हैं ? आपने और क्या देखा?

आपने अभी जो कुछ देखा, उसके बाद भी क्या आप कहेंगे कि बच्चे सीखने को उत्सुक नहीं हैं? क्या आप मानते हैं कि उनमें सीखने की इच्छा नहीं होती, और आलसी होते हैं? क्या हमें औपचारिक पढ़ाई में उनकी दिलचस्पी न होने की कोई और वजह नहीं सोचनी चाहिए? क्या यह हो सकता है कि जरूरत इस बात की है कि हम जो पढ़ाना चाहते हैं, और सिखाने के तरीकों को उनके लिए ज्यादा आकर्षक बनाए ? यदि हां, तो कैसे?

ऊपर दिए गए विवरणों में बच्ची किसी चीज़ को टटोल रही है और उस चीज़ पर अपनी हर क्रिया का असर देख रही है। तो, हम कह सकते हैं कि यदि हम बच्चों को ऐसी ठोस चीज़े दें जिनके साथ वे खेल सकें और कुछ भी कर सकें तो इससे सीखना रूचिकर बनेगा। या हम यह कह सकते हैं कि यदि स्कूल में हम उन्हें अपनी रफ्तार और अपने ढंग से चलने दें तो वे सीखना चाहेंगे। हालांकि, ये दो बातें सीखने में मददगार होंगी, लेकिन इतना ही काफी नहीं हैं। हम और क्या – क्या सोच सकते हैं इस बारे में?

इस मामले में एक पिता ने अपनी बच्ची के बारे में जो टिप्पणियां दी वे ध्यान देने लायक हैं। उन्होंने कहा, "जब भी मैं उसे कुछ सिखाना चाहता हूं, तो देखता हूं कि वह ऊब रही है, उसे रूचि नहीं है और उत्साह नहीं है। लेकिन जब मै उसे अकेले में मनचाही चीज़े करते देखता हूं, तो वह इतना कुछ करना सीख लेती है कि मैं दांतों तले उंगली दबा लेता हूं। शायद बच्चे अपने आप, अपनी शर्तों पर अपनी इच्छा के हिसाब से सीखना चाहते है और नहीं चाहते कि हर समय उन्हें बताया जाए कि वे क्या करें। मुझे लगता है कि बच्चे सीखना चाहते हैं, सोचना चाहते हैं और नई बातों को खोजना चाहते हैं। वे सिर्फ बड़ों द्वारा किए गए कामों को दोहराना नहीं चाहते। वे नई दिशाएं खोजना चाहते हैं।"

कई बार ऐसा होता है कि बच्चे स्कूल के शुरूआती सालों में तो सीखने को उत्सुक होते है, मगर ऊँची कक्षाओं में पहुंचने तक उनका उत्साह काफी कम हो जाता है। इसका क्या कारण हो सकता है?

उदाहरण 8 : गांव के प्राथमिक स्कूल के बच्चे एक दिन स्कूल आते, तो दूसरे दिन न आते। खास तौर से बड़ी कक्षाओं में गैर–हाज़री आम बात थी। तब नई शिक्षक शारदा देवी की नियुक्ति हुई। और एक महीने में उनकी कक्षा में बच्चे बहुत नियमित हो गए। इससे भी बड़ी बात यह हुई कि अन्य कक्षाओं के बच्चे भी उनकी कक्षा में घुसने की कोशिश करते रहते।

शारदा के पढ़ाने के तरीके में क्या खांस बात थी? वह सिर्फ किताबों की बातों को पढ़कर बच्चों से दोहराने को नहीं कहती थी। वह सचमुच बच्चों को स्कूल की इमारत से बाहर ले जाती और उनसे यह देखने को कहती कि आसपास आयत (मसलन) कहां दिख रहे हैं, पूछती कि घर पर अनुपात से संबंधित समस्याएँ कब आती है, और उन्हें जो भी सामग्री मिले उससे खेल–खिलौने बनाने देती। और शारदा ने इनमें से हर गतिविधि को अपनी कक्षा के प्रत्येक बच्चे के लिए सीखने का सार्थक अनुभव बना दिया।

इस उदाहरण से हम बहुत सी बातें सीख सकते हैं, मसलन अगर हम किसी बच्ची को कुछ पढ़ाना चाहतें हैं तो उसमें उसकी रूचि कैसे पैदा करें।

E10) बड़े लोग बच्चों के सीखने का जोश किस तरह से ठण्डा कर सकते हैं? और, किस तरह से वे बच्चों को अपने आसपास की दुनिया की खोजबीन करने में मदद कर सकते हैं?

अब तक हमने उदाहरणों से यह पता लगाने की कोशिश की कि क्या बच्चे बड़ों की नकल करके सीखते हैं। हमने पाया कि ऐसा नहीं हैं। हमने यह भी देखने की कोशिश की कि क्या बच्चे तब तक कुछ नहीं जानते जब तक कि कोई उन्हें ख़ास तौर से बताए (या पढ़ाए) नहीं। इस मामले में भी हमने देखा कि इस नज़रिए को अपनाने से कई ऐसी बातों की व्याख्या नहीं होती जो बच्चे जानते हैं तथा एक औपचारिक ढांचे में कौन से उपायों से यह पक्का हो पाएगा कि कोई बच्ची सीखे। हम कोई पक्के नतीजे पर नहीं पहुंचे हैं।

कुछ और उदाहरण

हमने देखा कि बच्चे न तो बड़ों की नकल करते हैं, न ही वे आंख मूंदकर हिदायतों का पालन करते हैं। वे अपने आसपास की दुनिया के साथ अपने संपर्क के आधार पर, अपने आप भी काफी कुछ सीखते हैं। दुर्भाग्यवश, शिक्षक अक्सर इस बात को अनदेखा कर देते हैं। नतीजतन, मिसाल के तौर पर वे इस बात से कोई फायदा नहीं उठाते कि स्कूल आने वाले अधिकांश बच्चे घर पर कुछ चीज़े तो गिनते ही होंगे।

शिक्षकों द्वारा की जाने वाली एक और दुर्भाग्यवश गलती का संबंध उनकी इस बारे में समझ से है कि बच्चे ठोस चीजों की खोजबीन के ज़रिए कैसे सीखते हैं। शिक्षकों को कई बार ऐसी चीज़ें दी जाती हैं जिनके साथ खेलकर बच्चे अपनी समझ का विकास कर सकते हैं। लेकिन अधिकांश शिक्षक टूट–फूट के डर से बच्चों को इन चीज़ों से खेलने नहीं देते। शिक्षक मानकर चलती है कि यदि वह चीज़ दिखा दे और उससे संबंधित अवधारणा बता दे तो बच्चे समझ जाएंगे। यदि वह बच्चों को आपस में बातचीत करने दे या उसने जो कुछ पढ़ाया उसके बारे में वे क्या समझे यह व्यक्त करने दे, तो शायद वह समझ पाएगी कि चीज़ों के ऐसे प्रदर्शन से बच्चे किस तरह के निष्कर्ष निकालते हैं।

हमने बात की कि बच्ची खाली स्लेट नहीं होती और वास्तव में हम आमतौर पर जितना मानते हैं उससे कहीं ज्यादा जानती हैं तथा जब बच्ची किसी चीज़ के साथ खेलती है और यह पता करने की कोशिश करती है कि वह चीज़ के साथ क्या–क्या कर सकती है और साथ में अपनी शारीरिक क्षमताओं को भी टटोलती है। उदाहरण बताते हैं कि बच्चे नई चीज़ें सीखने को निहायत उत्सुक होते हैं और सिर्फ बड़ों द्वारा थोपी गई हिदायतों से चिपके नहीं रहना चाहते। वे सिर्फ बड़ों की बातें दोहराने या नकल करने को कतई उत्सुक नहीं होते। दरअसल, बच्चे अपने ढंग से बड़ों को चुनौती देना चाहते हैं।

उदाहरण 9 क) : एक दोस्त ने अपनी तीन–वर्षीय बेटी फरीदा का किस्सा सुनाया जो दोपहर में बाहर जाना चाहती थी। उसने फरीदा से कहा कि अभी बाहर बहुत गर्मी है। फरीदा पिता से जिद करती रही मगर वह टस से मस नहीं हुआ। अन्ततः उसने पिता से कहा कि उसे थोड़ा पानी दे दे। किचन में पहुंचकर वह एक बहुत ही सुन्दर गिलास में पानी लेना चाहती थी, जो एक सेट का हिस्सा था। उसने आधा गिलास पानी पीकर पिता से कहा, "मै गिलास गिराने वाली हूँ।" पिता ने हौसला दिखाते हुए कहा, "गिराना है तो गिरा दो।" उसने फिर से कहा कि वह गिलास छोड़ देगी, और देखती रही कि पिता के चेहरे पर फिक्र या नाराज़गी नज़र आती है या नहीं तीन–चार मिनट तक यह चला और आख़िरकार उसने गिलास गिरा दिया, जो टूट गया।

उदाहरण 9 ख) : दो वर्षीय बच्ची की एक हैरान–परेशान माँ ने एक दिन शिकायत की, मेरी बच्ची हमेशा कुछ न कुछ नई शैतानी करती रहती है। आज हम कमरे के फर्श पर खेल रहे थे, और आपने हमारे घर की खिड़की की सिल देखा है ना, मैं बस एक पल के लिए किचन मे गई, और पलक झपकते ही वह स्टूल की मदद से मेज़ पर चढ़ गई और मेज़ पर से उस ऊँची खिड़की की दहलीज (sill) पर चढ़ी, और चिटकनी खोल डाली यह सब आधे मिनट में हो गया। मैं जब पहुंची तो वह खिड़की से बाहर हवा में लटक रही थी। वह तो मैं समय से पहुंच गई कि उसे वापस खींच लिया। पता नहीं उसने यह सब कैसे कर लिया।"

उदाहरण 9 (क) में निश्चित रूप से वह बच्ची अपने पिता या किसी अन्य बड़े की आंख मूंदकर नकल नहीं उतार रही थी। वह अपने पिता को ललकार रही थी, देख रही थी वह कहां तक जा सकती है। इसी प्रकार से जब कोई बच्ची खिड़की की दहलीज़ पर चढ़े तो यकीनन, यह नकल नहीं है, क्योंकि बाहर झांकने के लिए कोई भी बड़ा खिड़की की दहलीज पर नहीं चढ़ता। उसने किया यह कि बाहर देखने के लिए अपनी क्षमता में वृद्धि करने का एक तरीका खोज लिया। अर्थात् वह बड़ों के समान बनना चाहती है, वह सब करना चाहती है जो बड़े लोग करते हैं, उनसे ज्यादा करना चाहती है, उनकी नकल नहीं करना चाहती।

इसी प्रकार से बड़े बच्चों के पास भी बहुत सा ज्ञान और सूझबूझ होती है। मौका मिले तो वे भी इसे व्यक्त करते हैं।

उदाहरण 10 : गंगा दूर दराज़ के एक गांव में कक्षा 3 के बच्चों को एस्किमो (eskimo) के बारे में पढ़ाने जा रही थी। 'बर्फ' शब्द का उपयोग करने में हिचकिचाते हुए उसने बच्चों से पूछा कि क्या उन्होंने कभी बर्फ देखा है। बच्चे झिझकते हुए जवाब देने लगे। कुछ बच्चों ने कहा कि उन्होंने मेले में बर्फ देखा था। कुछ न कहा कि उन्होंने बर्फ का गोला खाया है। कुछ ने कहा कि बर्फ सफेद होता है और पिघलकर पानी बन जाता है। चूंकि शिक्षक जानना चाहती थी कि वे कितना जानते हैं, उसने उन्हें बोलने का मौका दिया। बच्चों से ही बर्फ के विभिन्न गुण उभर रहे थे। – कड़ापन, ठण्डापन, टूटकर किरचें बनना, उसे काटा कैसे जाता है, उसका भण्डारण कैसे करते हैं, आदि।

किसी अन्य दिन गंगा ने कक्षा 4 के बच्चों के साथ फ़सलों पर एक अध्याय करना था। कुछ सोचकर गंगा ने बच्चों से पूछा कि उनके आसपास कौन सी फ़सलें होती हैं। मानो, सारे बच्चे बस बोलने के मौके के लिए रूके हुए थे। एक साथ बोलने लगे। उन्होंने फ़सलों के नाम, उन्हें कैसे बोया जाता है, खाद और कीड़ों के बारे में बताया, गंगा भौचक्की थी। इतनी सारी जानकारी जो उसे कक्षा में मिली थी, वह न तो किताब में थी, न उसे पता थी।

गंगा का अनुभव स्कूल के अन्य शिक्षकों से मेल नहीं खाता। अन्य शिक्षकों की कक्षा में आम तौर पर होता यह है कि शिक्षक सवाल पूछते हैं और बच्चे टुकर – टुकर देखते रहते हैं। ये शिक्षक बताते हैं कि बच्चे बोलने में हिचकते हैं, गलत – सलत बोलते हैं और ऐसा लगता नहीं कि वे कुछ जानते हैं।

जब गंगा से पूछा गया कि बच्चों के बारे में उनकी सोच में इतना अन्तर क्यों है, तो उसने कहा, "जब हम बच्चों से वही दोहराने को कहते हैं जो हम पहले से जानते हैं, और जब भी वे गलती करें तब (कठोरता से या प्यार से) उनकी गलती सुधारते हैं तो वे हमारे साथ अपने मत बांटने को उत्सुक नहीं होते। जब उन्हें लगता है कि हम सचमुच उनकी बात सुनना चाहते हैं और उनकी भूल–चूक नहीं ढूंढेगे तो उनमें हौसला आता है और वे चर्चा में भाग लेते हैं।"

E11) बच्चों के एक ही समूह के बारे में शिक्षकों द्वारा प्रस्तुत दो बिल्कुल ही अलग चित्र क्यों हैं?

अब तक जो कहा गया, यदि हम उसका विश्लेषण करें तो आप सहमत होंगे कि सीखने के बैंकिग व प्रोग्रामिंग मॉडल इस बात का ब्यौरा प्रस्तुत नहीं करते कि कोई बच्ची दुनिया के साथ कैसे संबंध स्थापित करती है। अपने विकास के दौरान बच्ची आसपास की दुनिया के साथ एक संबंध जोड़ने की कोशिश करती है और हर चीज़ का अर्थ अपने ही सोच के ढांचे में परिभाषित करती है। वह आसपास की हर चीज़ को टटोलना चाहती है। असलियत के साथ इस संपर्क के जरिए वह अपनी अवधारणाएं रचती है।

चित्र 6 : बच्चे दुनिया के साथ संपर्क करके सीखते है।

बच्चों को पढ़ते वक्त और गणित पढ़ाते वक्त तो ख़ास तौर से हमें इन बातों को ध्यान में रखना चाहिए। ऐसा इसलिए कि गणित सीखने को बच्चे ख़ास तौर से कठिन मानते हैं। हमने कई मर्तबा शिक्षकों से गणित सीखने के बारे में बातचीत की है। शिक्षकों और शिक्षक –प्रशिक्षकों के साथ ऐसी सारी चर्चाओं में यही पता चलता है कि वे मानते हैं कि क्योंकि बच्चे गणित सीखने के लिए प्रेरित नहीं होते, इसलिए वे गणित सीख नहीं पाते। उनके मुताबिक इसका दूसरा कारण यह हो सकता है कि शायद शिक्षक ने अवधारणा ठीक से न समझाई होगी। उन्हें लगता है कि यदि शिक्षक ठीक से समझाए और उसे कई मर्तबा दोहराए तो बच्चे समझ जाएंगे।

उदाहरण 11 : कक्षा 4 के एक गणित शिक्षक ने अपने छात्रों को निहायत ईमानदारी से भिन्नों का जोड़ सिखाया। उसने इस पर तीन हफ्ते लगाए थे और उसे खुशी थी सारे बच्चे सवाल हल कर सकते थे। बच्चे उन सवालों का भी हल कर लेते थे। जिनमें LCM की गणना करनी होती है। मैंने उससे छात्रों को भिन्न के कुछ आसान सवाल देने की इजाज़त चाही। उसने मेरे द्वारा बनाए गए सवालों को देखकर कहा कि ये तो मामूली सवाल हैं। उसे यकीन था कि सभी छात्र इन सवालों को कर लेंगे। बल्कि उसने मुझसे कुछ कठिन सवाल भी बनाने को कहा था। मैंने कहा मैं बहुत पेचीदा चीज़ें नहीं बल्कि सिर्फ इतना देखना चाहता हूं कि क्या भिन्नों का छात्रों के लिए कोई अर्थ भी होता है।

हमने कक्षा के 44 छात्रों को वे सवाल दिए। जब शिक्षक ने बच्चों की उत्तर पुस्तिकाएं देखीं तो वह हक्का–बक्का रह गया और कहने लगा, "ऐसा कैसे हो सकता है ? पिछले सप्ताह ही मैंने इससे भी कठिन टेस्ट दिया था और बच्चों ने अच्छा किया था। वैसे ये सारी बातें उन्हें बार–बार समझाई थी। मैंने कोशिश की थी कि उन्हें सरल से सरल ढंग से समझाऊं और उदाहरण दे देकर यह भी बताया था कि वे सवाल कैसे हल करें। वास्तव में, मैंने उनसे कहा था कि जितनी बार जरूरी लगे वे मुझसे पूछ लें।" उसने कहा कि वह अब तक तो खुश था कि ज्यादातर बच्चे भिन्न सीख गए हैं, किन्तु इस टेस्ट ने दिखा दिया है कि वे कुछ नहीं सीखे हैं।

ऊपर के उदाहरण में शिक्षक साफ तौर पर प्रोग्रामिंग मॉडल में भरोसा रखता है। वही हाल इस शिक्षक–प्रशिक्षक का भी है जो शिक्षकों को यह समझाने का प्रयास कर रहा है कि बच्चों को गणित सीखने में क्या दिक्कत आती है। उसका कहना है, "बच्चे सीखना ही नहीं चाहते। चूंकि उन्हें गणित कठिन व उबाऊ लगता है, इसलिए हमें चाहिए कि उसे सरल बनाएं और छोटे–छोटे चरणों में पढ़ाएं। बच्चे तभी तो कर पाएंगे ना, जब हम उन्हें स्पष्टता से बताएंगे और हर चरण समझाएंगे। यदि हम अच्छे से पढ़ाएं और उचित ढंग से समझाएं तो बच्चे जरूर सीखेंगे।" लिहाज़ा उसका सुझाव था कि शिक्षक को चाहिए कि वह अवधारणाओं को उप – अवधारणाओं में बांट दे, हर टुकड़ा अलग – अलग समझाए और बच्चों से कहे कि वे इस प्रक्रिया का अनुसरण करें, अभ्यास करें।

E12) क्या आप उदाहरण 11 में शिक्षक के अंतिम कथन से सहमत हैं? अपने उत्तर का कारण दीजिए।

E13) आपने इस इकाई में जो कुछ पढ़ा उसके मुद्दे नजर आप गणित सिखाने–सिखाने को लेकर उक्त शिक्षक–प्रशिक्षक के सुझाव पर क्या कहेंगे? आपका इस संबंध में क्या सुझाव होगा कि बच्चों को गणित के सीखने में ज्यादा भागीदार बनाने के लिए शिक्षक क्या करें।

E14) आपके हिसाब से बच्चे गणित कैसे सीखते हैं?

सारांश

इस पाठ में हमने पूर्वस्कूली और प्राइमरी स्कूल के बच्चों के सोचने और सीखने की कुछ प्रक्रियाओं को गणित सीखने के संदर्भ में प्रस्तुत किया है। हमने खास तौर से निम्न मुद्दों पर जोर दिया हैः

1. बच्चे गणित की शुरूआत की अवधारणाओं की समझ कैसे बनाते हैं, खासकर

   (a) बच्चों का चीजों और लोगों से संपर्क उनके सीखने का प्रमुख आधार होता है। यह संपर्क लगातार बना रहता है। इसलिए बच्चे लगातार सीखते रहते हैं; अगर हम उन्हें न रोंकें, तो!

   (b) ज्ञान हासिल करना और सूचनाओं को तोते की तरह दोहरा देना एक ही बात नहीं है।

इस पाठ में हमने निम्नलिखित बिन्दुओं पर चर्चा की।

2. बच्चे बड़ों की नकल करके नहीं सीखते।

3. यह जरूर है कि बच्चे बड़ों का अवलोकन करते हैं और अक्सर वह करने की कोशिश करते हैं जो बड़े करते हैं। लेकिन यह नकल नहीं है। वे संबंधित क्रिया अवधारणा को समझने की कोशिश करते हैं और फिर उसे अपनी समझ के अनुसार अपने तरीकें से पेश करते हैं। वे अपने मां – बाप व आसपास के अन्य बड़ों से आगे बढ़ने को उत्सुक रहते है।

4. बच्चे अपने आसपास की दुनिया से अपनी शर्तों पर अन्तक्रिया करके सीखते हैं।

5. बच्चे सीखने को उत्सुक रहते हैं तथा कुदरती तौंर पर जिज्ञासु होते हैं। वे हर उस चीज़ की सीखते हैं जो उन्हें सार्थक व रोचक लगे।

6. हम शिक्षक का प्रदर्शन करते हैं, बशर्त्ते कि वे किसी काम में लगन से लगे हों और अपने ही सवालों को लेकर आगे बढ़ रहे हों।

भारतीय गणित

प्रस्तावना

भारतीय सभ्यता दुनिया की प्राचीन सभ्यताओं में से एक रही है। सभ्यता के विकास क्रम में गणित की महत्वपूर्ण भूमिका हमेशा रही है। गणित के नियमों एवं सिद्धांतों की रचना में भारतीय गणितज्ञों का योगदान विशिष्ट है। यहाँ हम कुछ भारतीय गणितज्ञों के बारे में संक्षिप्त जानकारी दे रहे हैं। इसके साथ ही वैदिक गणित की प्रचलित विधियों के कुछ पहलुओं को हम यहाँ रख रहे हैं। इन तरीकों का उपयोग करने के साथ–साथ यदि यह दृष्टिकोण रखा जाए –''कि ये सूत्र कैसे काम करते हैं ?'' तो गणित के विद्यार्थी को एक अभूतपूर्व आनंद की प्राप्ति होती है साथ ही गणित की रोचकता की अनुभूति तो होती ही है।

हमारे भारतीय गणितज्ञ

1. **आर्यभट् :–**

आर्यभट् का जन्म 476 ई. में पाटिलीपुत्र (पटना) के निकट कुसुमपुर में हुआ था। कुसुमपुर को बाद में पाटलिपुत्र कहा गया है और वर्तमान में यह बिहार की राजधानी पटना है। उस समय सम्पूर्ण भारत मगध शासक के निर्देशन में चहुँमुखी प्रगति कर रहा था। इसी काल में आर्यभट् ने 23 वर्ष की आयु में सन् 499 ई. में आर्यभटीय नामक ग्रंथ की रचना की।

इस ग्रंथ के चार प्रमुख भाग है : 1. गीतिका पाद, 2. गणित पाद. 3. कालक्रिया पाद 4. गोलपाद। गीतिका पाद में 13 श्लोक, गणित पाद में 33 श्लोक, कालक्रिया पाद में 25 श्लोक तथा गोल पाद में 50 श्लोक हैं। आर्यभटीय ग्रंथ में 121 श्लोक है। आर्यभट ने π का मान (3.1416) दशमलव के चार स्थानों तक ज्ञात किया है।आर्यभटीय के गणित पाद में जो विषय दिये हैं वे इस प्रकार हैं : संख्या स्थान निरूपण, वर्ग और घन, परिकर्म, वर्गमूल, घनमूल, त्रिभुज, वृत्त और समलम्ब चतुर्भुज के क्षेत्रफल तथा गोल और पिरामिड का आयतन तथा π का मान, R-sin सारणी, श्रेढ़ी गणितम्, त्रैराशिक, व्यस्त त्रैराशिक, पंचराशिक, सप्तराशिक, विपरीत कर्म, युगपत समीकरण, कुट्टक।

आर्यभटीय पर भास्कर प्रथम (629 ई.) ने भाष्य लिखा है। यह भाष्य बहुत प्रसिद्ध है। गणित में आर्यभट का योगदान अतुलनीय है। महत्वपूर्ण बिन्दुओं में से कुछ का उल्लेख यहाँ किया जा रहा है–

1. संख्याओं को व्यक्त करने की वर्णांक प्रणाली आर्यभट की मौलिक खोज है।
2. त्रैराशिक, पंचराशिक, सप्तराशिक के नियम आर्यभट ने दिये हैं। इस प्रकार के नियम देने वाले वे प्रथम गणितज्ञ हैं।
3. π का मान : आर्यभट के अनुसार
   चतुरधिकम् शतमष्टगुणम् द्वाषष्टिस्तथा सहस्राणाम्।
   अयुतद्वय विष्कम्भस्यासन्नों वृत्त परिपाहः ।।10।।

अर्थ : सौ में चार जोड़कर उसे 8 गुणा करें और इसमें 62000 जोड़ें। यह योगफल 20,000 व्यास के वृत्त की परिधि का लगभग माप होगा अर्थात् 20,000 व्यास के वृत्त की परिधि लगभग 62,832 होगी।

$$\text{पाई}(\pi) = \frac{\text{परिधि}}{\text{व्यास}}$$

$$= \frac{62832}{20000} \text{ (लगभग)}$$

इस प्रकार उनके अनुसार पाई (π) = 3.1416 लगभग, जो दशमलव के 4 स्थानों तक आज भी सही है। आर्यभट पहले गणितज्ञ हैं जिन्होंने परिधि और व्यास के अनुपात अर्थात् (π) पाई का लगभग परिमित मान ज्ञात किया था।

आर्यभट ने गणित और खगोल शास्त्र की अनेक बातें उस समय ली थीं। उनमें से कुछ निम्नलिखित हैं –

- कुट्टक याने $ax+by=\pm c$ जहाँ सभी संख्याएं पूर्णांक हैं। इस प्रकार के समीकरण हल करने की विधि आर्यभट ने दी।
- R-sine सारणी 3^0 से 90^0 तक उन्होंने दी है। इस सारणी में दिये गये मानों की शुद्धता उल्लेखनीय है। वे त्रिकोणमिति के आविष्कर्ता है।
- ज्यामिति में त्रिभुज का क्षेत्रफल तथा जीवा और व्यास से सम्बन्धित अनेक सिद्धांत उन्होंने दिये हैं।
- पृथ्वी गोल है।
- ग्रह स्वयं प्रकाशित नहीं है। उनका जो भाग सूर्य के सामने आता है उसी में प्रकाश रहता है।
- सूर्य स्थिर है तथा पृथ्वी आदि ग्रह सूर्य की परिक्रमा करते हैं यह बातें आर्यभट ने बताई हैं।
- उन्होंने सूर्यग्रहण और चन्द्रग्रहण के कारणों को स्पष्ट किया है।

छादयति शशी सूर्यं शशिन। महती च भूच्छाया ।।37।।

आर्यभट का कार्य परवर्ती गणितज्ञों के लिए मार्गदर्शक सिद्ध हुआ। आर्यभट की प्रसिद्धि भारत में ही नहीं अपितु विदेशों में भी है। अरब वासी इन्हें ''अरज भर'' नाम से पुकारते थे।

भारत ने 19 अप्रैल 1975 को अन्तरिक्ष में अपना पहला उपग्रह छोड़ा उसका नाम आर्यभट रखकर आर्यभट के योगदान के प्रति सम्मान प्रकट किया है।

2. वराहमिहिर :–

वराहमिहिर का जन्म काल पाँचवी शताब्दी के अन्तिम चरण में माना जाता है। विक्रम संवत् 556 तदानुसार 499 ई. के लगभग इनका जन्मकाल है। उज्जैन से 20 कि.मी दूरी पर स्थित कायथा (कापित्थ्का) नामक स्थान इनका जन्म स्थान माना जाता है। यह मध्यप्रदेश में स्थित है। वराहमिहिर के पिता का नाम आदित्य दास तथा माता का नाम सत्यवती था। वराहमिहिर ने कापित्थका में एक गुरूकुल की स्थापना की थी।

वराहमिहिर के ग्रंथ निम्नलिखित हैं –

1. पंच सिद्धान्तिका,

2 वृहज्जातक

3 वृहद्यात्रा

4 योगयात्रा

5 विवाह पटल

6 वृहत संहिता।

वृहत संहिता एक ऐसा ज्ञान कोष है जो भारतीय संस्कृति के इतिहास को विस्तार से प्रकट करता है। वराहमिहिर ज्योतिष के साथ–साथ खगोल विज्ञान के भी ज्ञाता थे। पंच सिद्धांत के प्रथम खंड में खगोल विज्ञान पर व्यापक विचार मिलता है। पंच सिद्धांतिका के चतुर्थ अध्याय में त्रिकोणमिति से संबंधित सूत्र मिलते हैं। उन्होंने अपनी वृहत संहिता ग्रंथ में संचय (**combination**) ज्ञात करने के लिए एक पद्धति विकसित की है जिसे लोस्ठ प्रस्तार कहा जाता है। सुगंधित द्रव्य तैयार करने की पद्धतियों को बताते समय वराहमिहीर ने (4×4 के पेंडियागोनल जादुई वर्ग) का उपयोग किया है। इनका निधन लगभग 644 विक्रम संवत् अर्थात् 587 ई. के आसपास हुआ।

3. ब्रह्मगुप्त :–

ब्रह्मगुप्त का जन्म 598 ई. अर्थात् 541 विक्रम संवत् में हुआ था। इनका जन्म स्थान भिनमाल माउन्ट आबू, राजस्थान में है। ब्रह्मगुप्त उज्जैन गुरूकुल के प्रमुख खगोलशास्त्री थे। उन्होंने 30 वर्ष की आयु में 628 ई. में ''ब्रह्मस्फुट सिद्धांत'' नामक प्रसिद्ध ग्रंथ की रचना की।

ब्रह्मस्फुट सिद्धांत भारतीय खगोलशास्त्र का प्रामाणिक एवं मानक ग्रंथ है। इस ग्रंथ में 24 अध्याय हैं। 12वें अध्याय को गणिताध्याय नाम दिया है, अर्थात् इसमें अंकगणित तथा छायागणित आदि पर सामग्री दी गई है। 18 वें अध्याय को कुट्टकाध्याय नाम दिया है। इसमें बीजगणित अनिर्धार्य रैखिक एवं वर्ग समीकरणों के हल दिये हैं। इसके अध्याय 2 में त्रिकोणमिति पर कार्य किया गया है। इस ग्रंथ के अलावा इसका ''खण्डखाद्यकम'' नामक करण ग्रंथ उपलब्ध है। इसमें विशेषकर अंतर्वेशन तथा समतल त्रिकोणमिति एवं गोलीय त्रिकोणमिति दोनों में **sin** (ज्या) और **cosine** (कोटिज्या) के नियम उपलब्ध है।

ब्रह्मगुप्त का ज्यामिति में विशेष योगदान है। उन्होंने चक्रीय चतुर्भुज के क्षेत्रफल ज्ञात करने का सूत्र दिया है जो इस प्रकार है :–

श्लोक :– स्थूलफलं त्रिचतुर्भुजबाहु प्रतिबाहु योग दलघातः।

भुजयोगार्ध चतुष्टय भुजोनद्यातात् पदं सूक्ष्मम्।।

चक्रीय चतुर्भुज का क्षेत्रफल $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$ जहां ***a,b,c*** एवं ***d*** चक्रीय चतुर्भुज की भुजाएँ हैं तथा $2s = a + b + c + d$ है। चक्रीय चतुर्भुज का क्षेत्रफल निकालने का यह सूत्र देने वाले यह विश्व के प्रथम गणितज्ञ हैं। इस सूत्र में $d = 0$ रखने पर इससे त्रिभुज का क्षेत्रफल भी ज्ञात किया जा सकता है।

4 स्वामी भारती कृष्ण तीर्थ :–

स्वामी भारती कृष्ण तीर्थ एक अनुपम गणितज्ञ थे। इनका जन्म 14 मार्च 1884 (चैत्र शुक्ल तृतीया) को तिन्निवेल्ली, तमिलनाडु में एक विद्या–विनय सम्पन्न परिवार में हुआ था। माता–पिता की ओर से उन्हें व्यंकटरमण नाम प्राप्त हुआ। केवल बीस वर्ष की आयु में सन् 1904 में उन्होंने अमेरिकन कालेज आफ साइंस रोचेस्टर न्यूयार्क के बम्बई केन्द्र से सात विषयों में एक ही साथ एम. ए. की परीक्षा सर्वोच्च अंकों में उत्तीर्ण कर सभी को आश्चर्य में डाल दिया।

स्वामी भारती कृष्ण तीर्थ द्वारा रचित ''वैदिक गणित'' नामक ग्रंथ एक अद्भुत चमत्कारी एवं क्रांतिकारी ग्रंथ है। गणित के प्रश्नों को हल करने का इसमें नितांत नवीन दृष्टिकोण प्रस्तुत किया गया है । गणित शिक्षण को सरल, सहज एवं रोचक बनाने में वैदिक गणित की विधियाँ अत्यंत उपयोगी सिद्ध हो रही हैं और नवीन शोध की ओर प्रेरित करती हैं। गणित के क्षेत्र में स्वामी भारती कृष्ण तीर्थ का योगदान अद्वितीय है। उन्होंने 2 फरवरी (बसंत पंचमी) 1960 में बंबई में महासमाधि ले ली।

वैदिक गणित— गणना की सरल विधियाँ

बीजांक

किसी संख्या के अंकों का जोड़ एक अंक प्राप्त होने तक करते हैं, यही अंक उस संख्या का बीजांक कहलाता है।

उदा. 1. 321 का बीजांक = 3 + 2 +1 = 6

2. 78 का बीजांक = 7 + 8 = 15 $\rightarrow$1 + 5 = 6

3. 56094 का बीजांक =5 + 6 + 0 + 9 + 4 = 24 $\rightarrow$ 2 + 4 = 6 बीजांक का उपयोग गुणा, जोड़, घटाना, वर्ग, घन आदि में उत्तर की जांच करने में होता है।

जोड़ना

सूत्र. एकाधिकेण पूर्वेण (एकाधिक चिह्न (.) के प्रयोग से)

इस विधि में संख्याओं को जोड़ते समय अंकों का जोड़ जैसे ही दो अंकों की संख्या में प्राप्त होता है बाएँ अंक पर एकाधिक चिह्न (.) लगा देते हैं। इकाई में अगले अंक को जोड़ते हुए संकलन की क्रिया सम्पन्न करते हैं।

उदा. 1

$$\begin{array}{r} 3\,8 \\ +\ \dot{2}\,7 \\ \hline 6\,5 \end{array}$$

चरण (1) 8 + 7 = 15, 7 के बायें अंक 2 पर एकाधिक चिन्ह (.) लगा देंगे तथा 5 को नीचे लिखेंगे।

चरण (2) 3 + $\dot{2}$ = 3 + 3 = 6 ($\because \dot{2}$ याने 2 का एकाधिक = 3)

उदाहरण 2

$$\begin{array}{r} 9378 \\ +\ \dot{2}\dot{8}\dot{9}5 \\ \hline 12273 \end{array}$$

(हल की प्रक्रिया पूर्वानुसार)

घटाना

सूत्र एकाधिकेन पूर्वेण के प्रयोग से घटाना सीखने के लिए परममित्र अंकों की आवश्यकता होगी, अतः पहले परम मित्र अंकों का परिचय प्राप्त करेंगे।

परममित्र अंक – जिन दो अंकों का योग 10 होता है वे आपस में परममित्र अंक कहलाते हैं।

जैसे :– 1 का परममित्र 9 तथा 9 का परममित्र 1 है ।

2 का परममित्र 8

3 का परममित्र 7

4 का परम मित्र 6

5 का परममित्र 5

सूत्र एकाधिकेण पूर्वेण के प्रयोग से घटाना – घटाते समय जब ऊपर का अंक छोटा होता है तब एकाधिक चिह्न (.) का प्रयोग किया जाता है।

उदाहरण 1

$$\begin{array}{r} 65 \\ -\dot{3}8 \\ \hline 27 \end{array}$$

चरण (1) प्रथम स्तंभ में ऊपर 5 छोटा है नीचे 8 से अतः बाएँ अंक 3 पर एकाधिक चिह्न (.) लगाते हैं तथा 8 का परममित्र 2 ऊपर के अंक 5 में जोड़कर 7 लिखते हैं ।

चरण (2) $6-\dot{3} = 6-4 = 2$ उत्तर 27

उदाहरण 2

$$\begin{array}{r} 8321 \\ -\dot{3}\dot{7}\dot{8}9 \\ \hline 4532 \end{array}$$

1. 1 + 9 का परममित्र = 1 + 1 = 2
2. 2 + $\dot{8}$ का परममित्र = 2 + 1 = 3
3. 3 + $\dot{7}$ का परममित्र = 3 + 2 = 5
4. 8 − $\dot{3}$ = 8 − 4 = 4

गुणा

सूत्र एकन्यूनेन पूर्वेण – (सूत्र का अर्थ है– पहले से एक कम के द्वारा) इस विधि का प्रयोग तब करते हैं जब एक संख्या अंक 9 की बनी हो।

स्थिति 1 : **जब गुण्य व गुणक में अंकों की संख्या समान हो।**

उदाहरण : 5436 × 9999

5435 | 4564

1. 5436 का एक न्यून = 5435 (उत्तर का बायाँ भाग)
2. 9999 – 5435 = 4564 उत्तर का दायाँ भाग

उत्तर : 54354564

स्थिति 2. **जब 9 अधिक हो –**

उदाहरण 0387 × 9999

0386 | 9613

उत्तर : 3869613

टीप : संख्या 387 के बाएँ 0 (शून्य) लगाकर अंकों की संख्या समान करते हैं। शेष प्रक्रिया पूर्वानुसार।

स्थिति 3. **यदि 9 के अंक कम हों–**

उदाहरण 473 × 99

हल 473 × 99

47299

– 472

46827

प्रक्रिया – पहले 473 का एकन्यून किया तथा 472 के बाद 99 यथावत लिखा। प्राप्त हुआ 47299 इसमें से 472 घटा देंगे। उत्तर 46827

2 **सूत्र एकाधिकेन पूर्वेण –** इस विधि का प्रयोग तब करते हैं तब इकाइयों का योग 10 हो, तथा शेष समूह समान हो।

उदा 1. 83 × 87

हल 83 × 87

72 | 21

उत्तर का बायाँ भाग = दहाई का एकाधिक × दहाई $\rightarrow (8 + 1) \times 8 = 72$

उत्तर का दायाँ भाग = इकाइयों का गुणनफल, $3 \times 7 = 21$

उदाहरण 2 302×308

हल 302×308

$$\begin{array}{r|l} 930 & 16 \end{array}$$

उत्तर. 93016

1. $(30+1) \times 30 = 930$
2. $2 \times 8 = 16$

3 **निखिलम् विधि –** इस विधि से गुणा तब करते हैं जब संख्याएँ आधार या उपाधार के निकट हों।

आधार – 10, 100, 1000........, उपाधार– 10, 20, 30......

विचलन – संख्या आधार या उपाधार से जितना अधिक या कम हो वह उसका विचलन कहलाता है। संख्या आधार से अधिक होने पर विचलन धनात्मक व कम होने पर ऋणात्मक होता है।

उदा. 1 106×108

हल

$$\begin{array}{r} 106 + 06 \\ \times 108 + 08 \\ \hline 114 \mid 48 \end{array}$$

उत्तर – 11448

1. आधार 100 है। आधार में दो शून्य हैं अतः दाएँ भाग में दो अंक रखेंगे।
2. उत्तर का दायाँ भाग = विचलनों का गुणा $\rightarrow 06 \times 08 = 48$
3. उत्तर का बायाँ भाग = एक संख्या + दूसरे का विचलन

106+08 = 114 या 108+06 = 114

उदाहरण 2. 98×89

हल. 98 – 02

$$\begin{array}{r} \times 89 - 11 \\ \hline 87 \mid 22 \end{array}$$

1. $(-02) \times (-11) = 22$
2. 98 – 11 = 87 या 89 – 02 = 87

4 सूत्र ऊर्ध्वतिर्यग्भ्याम –

सूत्र का अर्थ – ऊर्ध्व = खड़ा (↑), तिर्यक = तिरछा (⤧)

उदाहरण 1. 53
$\times$ 72

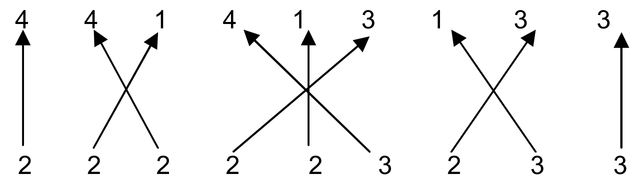
हल. 53
$\times$ 72
36 | 1 | 6

1. प्रथम स्तंभ का ऊर्ध्व गुणा (↑)
   3 $\times$ 2 = 6
2. प्रथम एवं द्वितीय स्तंभ का तिर्यक गुणा (5 $\times$ 2) + (7 $\times$ 3) = 31
   (31 का 1 तथा हासिल 3)
3. द्वितीय स्तंभ का ऊर्ध्व गुणा (↑) 5 $\times$ 7 = 35 (35 + हासिल 3 = 38)
   संक्षेप में

उदाहरण 2. 413
$\times$ 223

हल :– 413
$\times$ 223
9 | 2 | 0 | 9 | 9

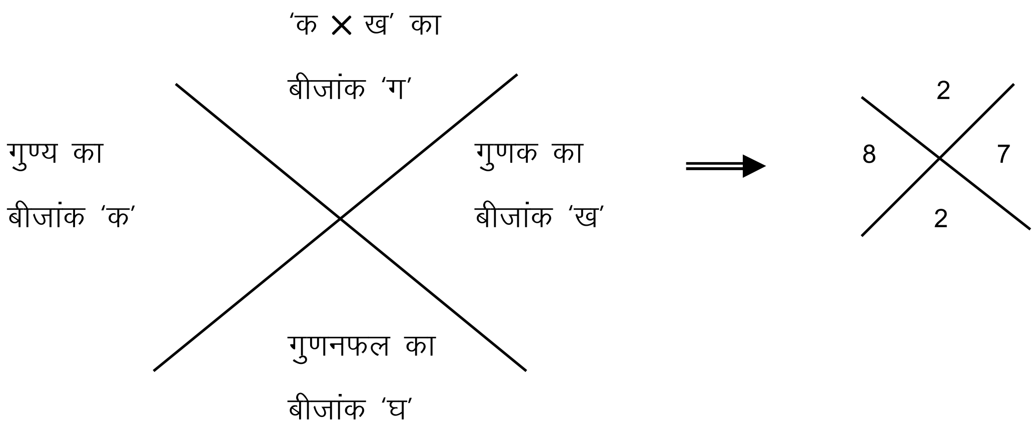
संकेत



उत्तर :– 92099

1. 3 $\times$ 3 = 9
2. (2 $\times$ 3) + (1 $\times$ 3) = 9
3. (2 $\times$ 3) + (4 $\times$ 3) + (1 $\times$ 2) = 20
   बीस (20) का 0 हासिल 2 = 12
4. (2 $\times$ 1) + (4 $\times$ 2) + हासिल 2 = 12
   12 का 2, हासिल 1
5. (4 $\times$ 2) + हासिल 1 = 9

गुणा के उत्तर की जाँच (बीजांक से) :



यदि ‘ग’ एवं ‘घ’ असमान हैं तो उत्तर निश्चित रूप से गलत है, यदि वे समान हैं तो उत्तर ठीक है।

भाग

ध्वजांक विधि – प्रश्न लिखने का तरीका निम्नानुसार है–

ध्वजांक संशोधित भाजक	भाज्य	
	भागफल	शेषफल ← विभाजन रेखा

उदाहरण 1. 456 ÷ 32

हल – भाज्य = 456, भाजक = 32, ध्वजांक = 2 (भाजक के इकाई अंक)

संशोधित भाजक = 3

3^2	4 ,5	,6
	1 4	8

भागफल = 14, शेषफल = 8

ध्वज में जितने अंक होते हैं, विभाजन रेखा भाज्य के इकाई ओर से उतने अंक छोड़कर खींची जाती है।

1. संशोधित भाजक (3) से भाग देना आरंभ करते हैं। 4 ÷ 3 भागफल 1, शेष 1। शेष 1 को भाज्य के अगले अंक 5 के सामने थोड़ा नीचे लिखते हैं। यह 15 हुआ ।
2. ध्वजांक × उत्तर का प्रथम अंक = 2 × 1 = 2, 15 – 2 = 13, 13 ÷ 3 = भागफल 4 शेष 1
3. 4 उत्तर का द्वितीय अंक है। शेष 1 को भाज्य के अगले अंक 6 के सामने थोड़ा नीचे लिखते हैं। प्राप्त हुआ 16
4. उत्तर का द्वितीय अंक × ध्वजांक = 4 × 2 = 8, 16 – 8 = 8

∵ विभाजन रेखा पार कर चुके हैं, अतः भाग देने की प्रक्रिया समाप्त करते हैं।

उत्तर भागफल = 14, शेषफल = 8

उदाहरण :– 7694 ÷ 63

हल

6^3	7 6 9	4
	1 2 2	8

1. संशोधित भाजक 6 से भाग देना आरंभ करें। 7÷6, भागफल 1, शेषफल 1 अब इस शेषफल 1 को भाज्य के अगले अंक 6 के सामने थोड़ा नीचे लिखें यह 16 हुआ ।
2. ध्वजांक × भागफल = 3 × 1 = 3
3. 16–3 = 13

4. 13 ÷ 6, भागफल 2, नीचे लिखा, शेषफल 1 अब इस शेषफल को अगले अंक 9 के सामने लिखा। यह 19 हुआ ।
5. ध्वजांक × भागफल = 3 × 2 = 6
6. 19−6 = 13
7. 13 ÷ 6, भागफल 2, नीचे लिखा, शेषफल 1 अब इस शेषफल को विभाजन रेखा के बाद लिखे 4 के सामने लिखा। यह 14 हुआ ।
8. ध्वजांक × भागफल = 3 × 2 = 6
9. 14−6 = 8 यह अंतिम शेषफल है।

भागफल = 122, शेषफल = 8

अभ्यास कार्य

1. बीजांक ज्ञात कीजिए –

243, 4527, 3284, 62793, 20495

2. सूत्र एकाधिकेण पूर्वेण से योगफल ज्ञात कीजिए–

1. 273 + 429 2. 2946 + 4287 3. 8724 + 8926

3 सूत्र एकाधिकेण पूर्वेण व परममित्र अंक की सहायता से घटाइये।

1. 53 − 38 2. 243 − 197 3. 2874 − 1889 4. 5362 − 3828

2. सूत्र एकन्यूनेन पूर्वेण से गुणा कीजिए

1. 23 × 99 2. 43 × 999 3. 628 × 99 4. 2573 × 9999 5. 253 × 9999 6. 723 × 99

3. सूत्र एकाधिकेन का प्रयोग कर गुणा कीजिए –

1. 46 × 44 2. 52 × 58 3. 103 × 107 4. 204 × 206

निखिलम् विधि से गुणा कीजिए –

1. 102 × 107 2. 108 × 109 3. 92 × 98 4. 89 × 93

4. सूत्र ऊर्ध्वतिर्यग्भ्याम् से गुणा कीजिए

1. 23× 42 2. 531 × 245 3. 243 × 354 4. 123 × 331

8. ध्वजांक विधि से भाग दीजिए–

1. 4627 ÷ 32 2. 6435 ÷ 81 3. 7294 ÷ 52 4. 84423 ÷ 73

उत्तर माला

1. 9, 9, 8, 9, 2
2. 702, 7233, 17650
3. 1. 14 2. 46 3. 985 4. 1534
4. 1. 2277 2. 25727427 3. 42957 4. 2529747 5. 62172 6. 71577
5. 1. 2024 2. 3016 3. 11021 4. 42024
6. 1. 10914 2. 11772 3. 9016 4. 8277
7. 1. 966 2. 130095 3. 86022 4. 40713
8. 1. भागफल 144, शेष 19 2. भागफल 79, शेष 36

2. भागफल 140, शेष 14 4. भागफल 1156, शेष 35